

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Мокин Николай Андреевич

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ВОЗДУХООПОРНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКИХ И
ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

05.23.17 – Строительная механика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Мондрус Владимир Львович

Москва – 2018

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ТЕОРИИ И ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ РАСЧЕТА ВОЗДУХООПОРНЫХ СООРУЖЕНИЙ	13
1.1. Оболочки в строительстве.....	13
1.2. Формы и конструкции воздухоопорных сооружений.....	13
1.2.1. Конструктивные особенности	13
1.2.2. Нормативные документы по проектированию и расчету воздухоопорных сооружений	16
1.2.3. Формообразование воздухоопорных оболочек	18
1.2.4. Нагрузки, действующие на воздухоопорные сооружения	21
1.3. Методы расчета оболочек воздухоопорных сооружений.....	28
1.3.1. Аналитические методы и решения.....	32
1.3.2. Численные методы.....	34
1.4. Выводы по главе 1.....	38
ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВОЗДУХООПОРНЫХ ОБОЛОЧЕК	39
2.1. Решение задач динамики воздухоопорных оболочек как систем с конечным числом степеней свободы.....	39
2.1.1. Основные положения метода конечных элементов	39
2.1.2. Выбор модели материала для воздухоопорных оболочек.....	45
2.1.3. Динамические расчеты.....	52
2.2. Численное моделирование потока воздуха, обтекающего оболочку	57

2.2.1. Уравнения для описания модели течения	59
2.2.2. Основная идея метода конечных (контрольных) объемов	62
2.2.3. Моделирование турбулентных потоков	64
2.3. Методика решения связанных задач	67
2.4. Выводы по главе 2.....	70
ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ.....	71
3.1. Деформирование изотропной оболочки под действием избыточного давления	71
3.1.1. Постановка задачи и особенности проведения расчета.....	71
3.1.2. Определение максимальных напряжений по безмоментной теории	74
3.1.3. Анализ и сопоставление результатов.....	75
3.2. Анализ собственных частот и форм колебаний мягкой ортотропной цилиндрической оболочки, находящейся под действием избыточного давления. 77	
3.2.1. Введение.....	77
3.2.2. Определение частот и форм собственных колебаний для системы с конечным числом степеней свободы	79
3.2.3. Особенности модального анализа предварительно напряженной системы.....	80
3.2.4. Описание расчетных моделей.....	81
3.2.5. Параметры расчетов.....	82
3.2.6. Результаты решения тестовой задачи	83
3.3. Численное моделирование обтекания недеформируемого кругового цилиндра потоком вязкой несжимаемой жидкости.....	87
3.3.1. Предварительные замечания.....	87
3.3.2. Постановка задачи	88

3.3.3. Результаты расчета	90
3.4. Свободные колебания гибкой пластины, находящейся в вязкой несжимаемой жидкости	95
3.4.1. Описание расчетной модели	95
3.4.2. Оценка результатов.....	98
3.5. Изгиб пластины, обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью	103
3.5.1. Постановка задачи	103
3.5.2. Сопоставление решения связанной задачи с источником	106
3.5.3. Сопоставление результатов расчета двусторонне и односторонне связанных задач.....	108
3.6. Выводы по главе 3.....	111
ГЛАВА 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ВОЗДУХООПОРНЫХ ОБОЛОЧЕК.....	113
4.1. Численное моделирование сферической воздухоопорной оболочки.....	113
4.1.1. Введение.....	113
4.1.2. Особенности использованных численных моделей.....	115
4.1.3. Сопоставление результатов эксперимента и численного моделирования.....	121
4.2. Расчеты воздухоопорной оболочки на прямоугольном плане	129
4.2.1. Определение раскройной формы оболочки	129
4.2.2. Расчет на действие внутреннего давления	130
4.2.3. Исследование собственных частот и форм колебаний	131
4.2.4. Решение задачи обтекания воздухоопорной оболочки на прямоугольном плане	135
4.3. Рекомендации по уточнению нормативного документа по проектированию и расчетам воздухоопорных оболочек	151

4.4. Выводы по главе 4.....	153
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	155
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	156

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования.

Текстильная архитектура в последнее время всё чаще используется для возведения зданий различного назначения. Возведение воздухоопорных оболочек над теннисными кортами, футбольными полями, баскетбольными и волейбольными площадками, а также легкоатлетическими манежами и катками позволяет использовать их не только в кратковременный летний период, но и в переходные осенне-весенние периоды, а зачастую и зимой. Во многих местах срок службы оболочек данного типа уже превышает 10 лет, а современные материалы позволяют продлить его еще больше (до 30 лет), что становится стимулом к распространению воздухоопорных оболочек.

Однако, имеется и печальный опыт разрушения воздухоопорных оболочек в результате различных причин в последние годы. Корректное предсказание поведения оболочки под действием расчетных нагрузок поможет выработать правильную стратегию их эксплуатации с целью избегания повреждения оболочки и нанесения вреда здоровью людей.

Кроме того, в настоящий момент перемещения оболочек подобного типа не нормируются [76]. Желание эксплуатирующих организаций более полного использования подоболочечного пространства (а также отсутствие или несвоевременное срабатывание систем аварийного повышения давления и установка специальных противопожарных ограждений) зачастую приводит к разрушению (раздиру) оболочки от столкновения с расположенными вблизи нее жесткими предметами при больших перемещениях от ветровых порывов.

Для корректного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) ввоздухоопорных оболочек необходима разработка методики расчета оболочки с учетом ее аэроупругого поведения под действием ветровой нагрузки, поскольку конструкции из тканей и тросов обладают намного большей податливостью, чем сооружения из традиционных материалов. При действии расчетных нагрузок

происходит сложное взаимодействие конструкции с окружающей средой, которое приводит как к изменению формы конструкции, так и к одновременному изменению самой действующей нагрузки по величине и направлению.

Таким образом, расчёт воздухоопорных сооружений имеет достаточно большую значимость и требует особой проработки методики решения связанных задач.

Цель диссертационной работы

Анализ напряженно-деформированного состояния воздухоопорных сооружений и нагрузок, действующих на них, на основе расчетов, проводимых с учетом ортотропии свойств материала оболочки, взаимовлияния деформирования оболочки и действующих нагрузок.

Для достижения указанной цели решались следующие задачи:

1) Анализ нормативных документов и научно-технической литературы по расчету и проектированию воздухоопорных оболочек.

2) Изучение способов моделирования ветровых нагрузок на здания и сооружения.

3) Изучение математических моделей материала мембранных конструкций и сплошной среды с целью выбора оптимальных моделей как с точки зрения адекватности описания изучаемых явлений, так и с точки зрения устойчивости и скорости вычислительного процесса.

4) Разработка методики расчета воздухоопорных оболочек в двусторонне связанной постановке на действие воздушного потока с использованием современных высокопроизводительных программных средств.

5) Верификация разработанной методики путём решения тестовых (имеющих альтернативное решение) двусторонне связанных задач деформирования упругих конструкций, взаимодействующих с окружающей средой.

6) Расчет воздухоопорных оболочек различной формы на действие внутреннего давления и ветровой нагрузки с использованием разработанной

методики, сопоставление результатов с результатами теоретических и экспериментальных исследований других авторов.

Научная новизна

– Построена корректная математическая модель воздухоопорной оболочки с учетом ортотропии и геометрической нелинейности

– Разработана методика расчета воздухоопорных оболочек в геометрически нелинейной постановке с использованием метода конечных элементов и метода конечных объемов на действие ветрового воздействия.

– Решены задачи деформирования ортотропных воздухоопорных оболочек различной формы под действием внутреннего давления и ветровой нагрузки в двусторонне связанной постановке с использованием разработанной методики.

– Исследовано влияние величины внутреннего давления на частоты и формы собственных колебаний воздухоопорных оболочек на прямоугольном плане с помощью метода конечных элементов.

Практическая значимость работы

Расчеты сооружений по разработанной методике позволяют подобрать рациональные параметры эксплуатации воздухоопорных сооружений различной формы во время опасных погодных явлений (снегопадов, ураганов и пр.), а также повысить безопасность подобных конструкций. Разработанные рекомендации позволяют оценить прогибы и перемещения воздухоопорных оболочек на прямоугольном плане без проведения трудоемкого и дорогостоящего моделирования двусторонне связанного поведения оболочки путем обоснованного в данной работе уточнения нормативного распределения ветровой нагрузки по поверхности оболочки.

Представленные в диссертационном исследовании результаты могут быть использованы, как проектировщиками воздухоопорных сооружений, так и организациями, осуществляющими их эксплуатацию.

Положения, выносимые на защиту

в соответствии с пунктами паспорта специальности:

(1. Общие принципы расчета сооружений и их элементов, 4. Численные методы расчета сооружений и их элементов)

1) Разработанная методика численного расчета воздухоопорных оболочек в двусторонне связанной постановке на действие воздушного потока на основе метода конечных элементов и метода контрольных объемов.

2) Результаты численного анализа НДС ортотропных воздухоопорных оболочек различной формы под действием внутреннего давления и ветровой нагрузки в связанной двусторонней постановке.

(8. Исследование нагрузок на сооружения)

3) Способ получения уточненной оценки перемещений оболочки на основе несвязанных расчетов.

Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов и обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается:

- корректностью постановки задач в рамках теоретических предпосылок строительной механики, механики деформируемого твёрдого тела, вычислительной гидродинамики;

- построением корректных математических моделей;

- применением апробированных численных методов и использованием верифицированных программных комплексов;

- сопоставлением результатов численного решения задач с результатами экспериментальных и теоретических исследований других авторов.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались на научно-технических конференциях:

- XIX Международная межвузовская научно-практическая конференция студентов, магистрантов, аспирантов и молодых учёных «Строительство – формирование среды жизнедеятельности», ФГБОУ ВО «Национальный

исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, 2016 г.

- Молодежный международный научно-практический семинар молодых ученых и студентов «Современные исследования в области прикладных инженерных наук», Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов», Москва, 2016 г.

- VI Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»), Федеральное государственное бюджетное учреждение «Российская академия архитектуры и строительных наук», Москва, 2017 г.

- XX Международная межвузовская научно-практическая конференция студентов, магистрантов, аспирантов и молодых учёных «Строительство – формирование среды жизнедеятельности», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, 2017 г.

- Международная научно-практическая конференция, посвященная 90-летию со дня рождения профессора Н.Н. Леонтьева и 110-летию со дня рождения профессора В.З. Власова, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», Москва, 2017 г.

- 8-я Международная конференция по текстильным композитным материалам и надувным конструкциям (8th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures) «STRUCTURAL MEMBRANES», Мюнхен, Германия, 2017 г.

Публикации.

Основные положения диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 3 в рецензируемых научных журналах, входящих в Перечень ВАК РФ:

1. Мокин Н.А. Проведение нелинейных расчетов воздухоопорных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №2. С. 24-33 (апрель 2017 г.).

2. Ибрагимов А. М., Кустов А. А., Мокин Н. А. Экспериментальное и численное исследование напряженно-деформированного состояния технической ткани с покрытием, работающей в составе строительной конструкции в форме гиперболического параболоида // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 7. С. 35-42

3. Мокин Н.А., Кустов А.А., Ганджунцев М.И. Численное исследование собственных частот и форм колебаний воздухоопорных сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 4. С. 337–347.

2 публикации проиндексированы в международной базе цитирования Scopus:

1. Mokin N.A., Kustov A.A., Trushin S.I. Numerical simulation of an air-supported structure in the air flow // 8th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures - STRUCTURAL MEMBRANES 2017, p. 383-393 (октябрь 2017 г.).

2. Kustov A.A., Mokin N.A., Ibragimov A.M. Mechanical properties of technical coated fabrics under axial and off-axial tensile tests // 8th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures - STRUCTURAL MEMBRANES 2017, p. 100-111 (октябрь 2017 г.).

Структура и объем работы.

Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы. Работа изложена на 170 страницах машинописного текста, включающего 12 таблиц, 62 рисунка, список литературы из 152 наименований, в том числе 54 на английском языке.

В первой главе приведено краткое описание конструктивных особенностей, обзоры нормативных документов по проектированию и расчету воздухоопорных сооружений, а также обзор работ по методам расчета воздухоопорных оболочек, обоснована актуальность и практическая значимость изучаемой темы.

Во второй главе приведены основные положения метода конечных элементов применительно к расчету мягких ортотропных оболочек, обоснован выбор

расчетной модели материала оболочки, записаны основные уравнения механики сплошной среды, а также описана предлагаемая методика численного решения связанных задач.

В третьей главе представлены результаты решения тестовых задач по статическому и динамическому расчету изотропных и ортотропных упругих мембран, обтекания вязкой несжимаемой жидкостью цилиндра, сопряженного деформирования упругой пластины и окружающей ее жидкости в режиме свободных колебаний и при обтекании потоком.

В четвертой главе решается связанная задача деформирования воздухоопорной оболочки сферической формы, на основе сопоставления экспериментальных данных с результатами расчетов обоснован выбор модели турбулентности; далее выполняются расчеты оболочек на прямоугольном плане: определяется рациональная раскройная форма, исследуется зависимость собственных частот от величины внутреннего давления, а также в двусторонне связанной постановке решается задача о деформировании оболочки обтекающим ее воздушным потоком; проведен анализ влияния направления потока воздуха на напряженно-деформированное состояние; далее приводятся рекомендации по упрощенным методам определения прогибов воздухоопорных оболочек при обтекании их воздушным потоком.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ТЕОРИИ И ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ РАСЧЕТА ВОЗДУХООПОРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

1.1. Оболочки в строительстве

Воздухоопорные сооружения представляют собой частный случай оболочечных конструкций строительного назначения. В [53] рассмотрены области применения оболочек из различных материалов при возведении зданий и сооружений, даны рекомендации по формообразованию, расчету и конструированию, приведены примеры расчета и конструирования тонкостенных покрытий. Расчету оболочечных конструкций посвящено обширное количество публикаций, поскольку с начала XX века развитие различных отраслей машиностроения, а также технологий строительного производства, существенно расширило их область применения. Примеры известных оболочечных строительных конструкций, построенных в последние годы можно найти, например, в [50].

1.2. Формы и конструкции воздухоопорных сооружений

1.2.1. Конструктивные особенности

Воздухоопорные сооружения представляют собой мягкие оболочки, форма которых поддерживается за счет избыточного давления воздуха, непрерывно нагнетаемого под оболочку. Примеры воздухоопорного сооружения на прямоугольном плане показаны на рисунках 1.1 и 1.2. Для изготовления воздухоопорных оболочек в нашей стране применяются технические ткани с покрытием, которые используются также и для изготовления тентовых

конструкций, в связи с чем воздухоопорные и тентовые конструкции объединяют понятием «текстильная» или «мембранная» архитектура.

В силу особенностей изготовления технических тканей (ткацкого переплетения), их механические свойства неоднородны. Система продольных нитей в ткани называется основой, система поперечных нитей – уток [79]. Как правило, жесткость ткани на растяжение в направлении основы выше, чем в направлении утка.

Изгибная жесткость технических тканей с покрытием пренебрежимо мала, и, можно считать, что в оболочке возникают только мембранная группа усилий, другими словами, напряженное состояние оболочки представляется безмоментным.

Если оба главных напряжения оболочки растягивающие, то ее напряженное состояние является двухосным. Кроме того, мягкие оболочки практически не сопротивляются сжатию, поскольку в направлении сжимающего напряжения (при весьма малом его значении) образуются складки, способные работать только в направлении растяжения [32]. В этом случае напряженное состояние оболочки является одноосным.



Рисунок 1.1 Спортивно-развлекательный комплекс «Олимпия» в г. Иваново (размеры в плане 110x77 м), спроектирован и возведен ООО «Вектор-М»



Рисунок 1.2 Воздухоопорное покрытие футбольного стадиона в Краснодаре, спроектированного и возведенного ООО «ПСБ «Вертеко»

В последние годы в связи с развитием химической промышленности интерес к воздухоопорным оболочкам, и к текстильной архитектуре вообще, вновь возрастает во всем мире [135]. Этому способствует проведение раз в два года международных конференций по мембранным конструкциям (*STRUCTURAL MEMBRANES*) с привлечением ведущих ученых в данной области [108, 141, 142]. В России подобные сооружения возводятся ежегодно, поэтому отечественные исследователи в последнее время все чаще обращаются к этой теме [49, 84, 96, 58, 60, 97]. Изучаются не только вопросы прочности и деформирования воздухоопорных оболочек, но и весьма важные вопросы теплообмена и движения воздуха под оболочкой [94], а также поведение оболочки при пожаре [70].

Как правило, воздухоопорные оболочки применяются в качестве большепролетных покрытий сооружений различного назначения.

Конструкции из тканей и тросов обладают намного большей податливостью, чем сооружения из традиционных материалов, поэтому при действии расчетных нагрузок происходит сложное взаимодействие конструкции с окружающей средой,

которое приводит как к изменению формы конструкции, так и к изменению самой действующей нагрузки (и по величине, и по направлению). Такое поведение конструкций носит название аэроупругого [9].

До недавнего времени, основным источником знаний о подобных явлениях служили экспериментальные исследования, которые, как правило, проводились для нужд авиационной и космической промышленности. Разработанные аналитические и полуэмпирические методы решения подобных задач преимущественно применимы для узкого класса задач с простейшей геометрией и рядом ограничений, накладываемых на постановку задачи и граничные условия [5].

С развитием вычислительной техники и расчетных программ появилась возможность достаточно корректно численно моделировать взаимодействие сооружения с окружающей средой (англ. *fluid-structural interaction*) с минимальным количеством упрощений [106, 150].

Решение подобных сложных связанных задач в строительной отрасли является достаточно актуальным направлением [9].

1.2.2. Нормативные документы по проектированию и расчету воздухоопорных сооружений

В современной отечественной нормативной базе имеется лишь один документ непосредственно относящийся к проектированию воздухоопорных сооружений – это временная инструкция СН 497-77 [76]. Как следует из названия, она была разработана более 40 лет назад, ориентирована на материалы, размеры, конструкции сооружений и методы расчета, применявшиеся в то время. Следует отметить, что норматив ссылается на устаревшие нормы по нагрузкам и воздействиям [77], а также не учитывает результаты многочисленных теоретических и экспериментальных исследований по изучению воздухоопорных сооружений, которые в большом количестве были проведены в 80-е годы XX века

[7, 33, 118, 129] и проводятся в настоящее время [125, 141, 142]. Кроме того, накоплен значительный опыт возведения и эксплуатации воздухоопорных сооружений в самых различных условиях, разработаны и проверены на практике оптимальные конструктивные решения [120, 146]. Можно утверждать, что назрела необходимость пересмотра указанного нормативного документа. Следует заметить, что работа в данном направлении ведется: сейчас завершена разработка нового свода правил по проектированию строительных тентовых конструкций [79], вступающего в силу с 14.02.2019. Несмотря на то, что область применения этого документа – проектирование оболочек отрицательной гауссовой кривизны с механическим способом натяжения, многие положения касательно оценки и проверки механических и прочностных свойств материалов имеют прямое отношение и к воздухоопорным сооружениям, так как для изготовления обоих типов конструкций используются одни и те же технические ткани с покрытием. На очереди разработка свода правил взамен временной инструкции [76].

Следует заметить, что в Евросоюзе нормативный документ по расчету и проектированию мембранных конструкций *Eurocode 10* находится в разработке [116].

В США отдельный стандарт для проектирования и расчета воздухоопорных сооружений [104] не так давно был включен в состав нормативного документа по проектированию тентовых конструкций [105].

В действующих отечественных нормах по нагрузкам и воздействиям [78] не приводится информация по уточнению ветровой и снеговой нагрузки на воздухоопорные сооружения, хотя результаты расчетов, приведенные в п. 4.2.4.4 данной работы указывают на искажение картины распределения аэродинамического коэффициента из-за существенного изменения формы воздухоопорных оболочек.

Как правило, в нормативных методиках расчета используется упрощенный подход – применение линейной безмоментной теории для получения максимальных усилий, действующих в оболочке от различных нагрузок.

Сравнение различных подходов к расчету воздухопорных сооружений можно найти в руководстве [120].

В отечественном своде правил полный коэффициент надежности по материалу K_n определяется в виде произведения частных коэффициентов по формуле (4) [79]:

$$K_n = K_o K_d K_c K_{ш}, \quad (4)$$

где K_o – коэффициент однородности материала, равный 1.33;

K_d – коэффициент длительной прочности материала, равный 1.43;

K_c – коэффициент старения материала, равный 2.2;

$K_{ш}$ – коэффициент старения сварных швов, равный 1.15.

Указанные значения приведены для материалов с полиэфирной текстильной основой и покрытием из пластифицированного ПВХ, которые получили наиболее широкое распространение в отечественной практике.

Тогда общий коэффициент надежности равен:

$$K_n = 1.33 \cdot 1.43 \cdot 2.2 \cdot 1.15 = 4.81.$$

Таким образом, для соблюдения условий прочности напряжения по основе и утку для оболочек не должны превышать 20.79% нормативной прочности.

Для сравнения, в нормативном документе США [105] коэффициент редукиции прочности назначается в зависимости от сочетания нагрузок от 0.17 (при действии только постоянных нагрузок) до 0.33 (при учете кратковременных нагрузок), что соответствует полным коэффициентам запаса по прочности материала от 6 до 3, что хорошо согласуется с рекомендациями отечественных норм.

1.2.3. Формообразование воздухопорных оболочек

Различают три состояния воздухопорных оболочек [32]:

– начальное (раскройное), когда давление воздуха в оболочке превышает атмосферное лишь настолько, чтобы она приняла проектную форму;

– исходное, когда давление воздуха достигает эксплуатационного уровня, но остальные нагрузки не приложены;

– конечное, после приложения нагрузок.

Для того, чтобы на оболочке не образовывались складки оба главных усилия должны быть неотрицательными, то есть оболочка должна находиться в двухосном напряженном состоянии.

Запишем уравнение Лапласа, выражающее сумму всех сил, спроецированных на нормаль к элементарному участку оболочки:

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p, \quad (1.1)$$

N_1, N_2 – главные растягивающие усилия;

R_1, R_2 – главные радиусы кривизны в данной точке;

p – избыточное давление.

Уравнение (1.1) можно переписать в виде:

$$N_2 = R_2 \left(p - \frac{N_1}{R_1} \right), \quad (1.2)$$

Таким образом при некотором соотношении радиусов кривизн при положительном усилии N_1 может возникнуть ситуация, когда усилие N_2 станет равным нулю или отрицательным.

В частности, для оболочек вращения условие существования двухосного напряженного состояния примет вид [3, 46]:

$$2R_1 \geq R_2 \quad (1.3)$$

В том случае, если после раскроя и монтажа оболочки это условие не выполняется, то на ней возникают одноосные зоны с морщинами и складками (рисунок 1.3). Следует отметить, что эти складки не устраняются путем увеличением давления под оболочкой.

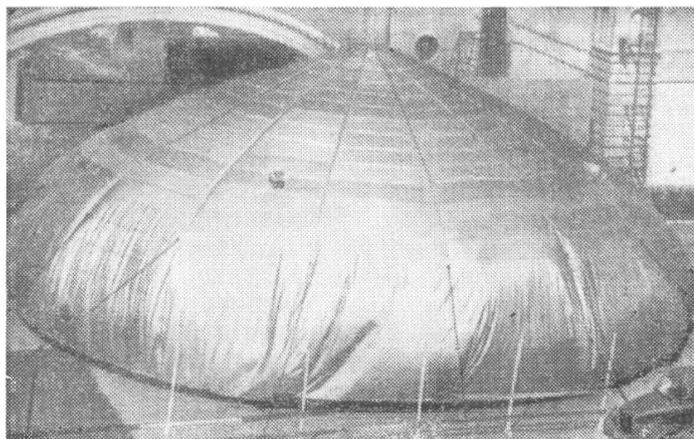


Рисунок 1.3 Складки на оболочке, вызванные неправильным раскроем [32]

Условия отсутствия складок на мягкой оболочке общего вида можно найти в работах [3, 86]:

$$T_1 T_2 - S^2 > 0 \quad (1.4)$$

где T_1 , T_2 , S – нормальные растягивающие и касательное усилия, отнесенные к деформированной поверхности.

Таким образом форма воздухоопорных оболочек не может приниматься произвольно [32]. поскольку оболочка является мягкой, что может привести к образованию морщин и складок.

Идеальной формой пневматической оболочки можно считать такую, у которой во всех точках возникают равные натяжения в любом направлении. Такую поверхность при действии внутреннего давления воздуха безошибочно моделирует мыльная пленка, которая по природе своей не может не быть равнонапряженной [32].

В связи с этим расчету воздухоопорных оболочек на действие проектных нагрузок предшествует процедура поиска оптимальной формы поверхности оболочки (в зарубежной литературе она обозначается термином «*formfinding*» [125]), удовлетворяющей объемно-планировочным требованиям (форма опорного контура, высота оболочки, объем подоболочечного пространства и т.п.).

Ранее для поиска формы использовалось физическое моделирование с помощью мыльных пленок или тонких резиновых мембран [65].

Если считать, что поверхность оболочки задана в декартовой системе координат в виде $z = f(x, y)$, то дифференциальное уравнение мыльной пленки, соответствующее состоянию оболочки, при котором напряжения во всех направлениях равны, а также отсутствуют касательные напряжения [65], можно записать в виде [126, 136]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \\ = \frac{p_i}{n_0} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где p_i – величина внутреннего давления;

n_0 – равномерное растягивающее усилие предварительного напряжения.

Исключая немногие частные случаи, имеющие точное решение (например, сферическая оболочка на круглом плане), уравнение мыльной пленки может быть разрешено только с помощью численных методов, например, путем замены производных конечно разностными аппроксимациями.

Кроме описанного численно-аналитического подхода в настоящее время для решения данной задачи в основном используются различные численные методы:

- метод динамической релаксации [112];
- метод конечных элементов (см. статью Э. Хауга в [33], а также [109]);
- метод плотности сил [93, 117, 125];
- метод натянутых сеток [52].

1.2.4. Нагрузки, действующие на воздухоопорные сооружения

1.2.4.1. Собственный вес

Собственный вес материала воздухоопорных оболочек, даже с учетом внутреннего слоя и утолщения в местах сварных швов, редко превышает 20 Н/м²,

поэтому как правило не учитывается в расчетах, о чем имеется запись в п. 3.3 нормативного документа [76].

1.2.4.2. Внутреннее давление

Внутреннее давление под оболочкой относится к постоянным нагрузкам, поскольку является необходимым условием существования оболочки. Для повышения давления под оболочкой используются специальные воздухонагнетательные установки, которые обеспечивают заданную величину избыточного давления. Из-за неплотностей, шлюзов, вентиляционных отверстий, воздухопроницаемости самого материала оболочки происходит постоянная утечка воздуха. Из-за этого давление под оболочкой не является неизменным, однако, этим как правило пренебрегают в расчетах.

Помимо этого, изменение величины внутреннего давления в воздухоопорных оболочках может происходить вследствие деформаций оболочки, при уменьшении подоболочечного пространства, однако, как указано в работе [44], оно не превышает 7%, а так как напряжения от внутреннего давления достаточно малы, то этим изменением можно пренебречь [129].

Как правило, при обычных погодных условиях величину избыточного давления стремятся уменьшить, чтобы снизить затраты на работу системы воздухообеспечения, поэтому нормы [76] регламентируют минимальную величину избыточного давления принимать равной 150 Па.

В расчетах оболочки на прочность участвует не минимальное, а максимальное давление, поскольку его повышение вызывает рост напряжений в материале. Максимальная величина давления принимается не менее 400 Па и не менее $0.8q_0$, где q_0 – нормативный скоростной напор ветра, определяемый в зависимости от ветрового района по нормативному документу [77], действовавшему на момент принятия [76]. До III-го ветрового района включительно величина $0.8q_0$ не превосходит 400 Па, для IV-VII районов она изменяется от 440 до 800 Па.

Учет в расчетах повышенной величины внутреннего давления следует отличать от требования увеличения внутреннего давления до максимального в

случае приближения к расчетной ситуации (повышении скорости ветра). Таким образом, сложилась ситуация, при которой в единственном действующем нормативном документе отсутствует указание о необходимости повышения внутреннего давления под оболочкой в случае приближения скорости ветра к расчетной. Подобные рекомендации для оболочек различной формы можно найти в [33].

В настоящее время возможна установка специальных систем, которые могут в автоматическом режиме повышать давление под оболочкой, если наружный датчик сообщит о превышении скорости ветра критического значения, однако, установка подобных систем и их нормальная эксплуатация не являются обязательными.

1.2.4.3. Снеговая нагрузка

Почти для всей территории нашей страны снеговая нагрузка является достаточно существенной. Установлено [32], что снеговая нагрузка на поверхности воздухоопорных оболочек значительно меньше, чем на конструкциях аналогичных форм из жестких материалов, что объясняется не только подвижностью и колебаниями оболочки в результате действия ветра и изменений давления воздуха, и гладкостью поверхности, с которой снег легко соскальзывал, но и малой теплоизолирующей способностью оболочки, что приводит к подтаиванию снега и его быстрому сползанию, в том случае, если температура оболочки положительна. В связи с этим нормами [76] установлены пониженные значения снеговой нагрузки на воздухоопорные сооружения: от 70 Па для I снегового района, до 280 Па – для VI снегового района. Однако, в [76] схема распределения снеговой нагрузки на покрытие не приводится, указанная величина нагрузки используется только для определения максимальных усилий.

Тем не менее, именно зимой зарегистрировано несколько случаев обрушения воздухоопорных оболочек: в 2009 году (г. Бор Нижегородской области), в 2010 году (г. Липецк, пос. Шексна, Вологодская обл.), в 2013 году (г. Иваново), в 2016 году (г. Ярославль). Следует заметить, что при всех указанных происшествиях никто не пострадал.

Как правило, обрушение было вызвано не снеговой нагрузкой, а неправильной эксплуатацией сооружений. Часть из них произошла ночью, когда эксплуатирующие организации отключали обогрев помещения, поскольку посетители отсутствовали. Это приводило к тому, что подтаявший снег образовывал на оболочке твердую ледяную корку, которая при небольших колебаниях оболочки под действием ветра могла прорезать ткань. В Иванове опускание оболочки произошло из-за того, что после отключения основного источника электроснабжения в связи с обрывом проводов, не сработала резервная система электропитания, из-за чего нагнетание воздуха не происходило всю ночь.

На рисунке показана фотография катка в пос. Шексна (Вологодская обл.), на которой стрелками обозначены специальные металлические ограждения, которые в случае опускания оболочки должны удерживать ее на достаточной высоте от пола для безопасной эвакуации людей.



Рисунок 1.4 Интерьер катка в пос. Шексна. Стрелками показаны ограждения

В 2010 году произошло опускание данного покрытия. Одна из версий произошедшего состоит в том, что глыба льда и снега, которая соскользнула с оболочки, вызвала местные прогибы мембраны и произошел контакт мембраны с указанными ограждениями, разрыв оболочки и ее опускание, которое продолжалось в течение 10 минут. Этого времени оказалось достаточно, чтобы вывести из-под опустившейся оболочки всех людей, не смотря на то, что в тот момент шла детская тренировка.

Следует отметить, что если во время интенсивного снегопада давление воздуха под оболочкой будет недостаточным, то на ней может возникнуть водяной мешок из талого снега, глубина которого будет только увеличиваться, что может привести к опусканию или разрыву материала оболочки [32]. По такому сценарию произошло опускание покрытия стадиона *Metrodome* в декабре 2010 года в США (рисунок 1.5). Кроме того, конструкция этого покрытия отличается тем, что из-за большого пролета оболочка является очень полой и снег с нее не соскальзывал. В нашей стране сооружения подобного размера и конструкции пока не возводились.



Рисунок 1.5 Обрушение покрытия стадиона *Metrodome* в 2010 году

В нормативном документе США [105] указано, что восприятие снеговой нагрузки может осуществляться следующими методами:

- за счет повышения внутреннего давления до величины расчетной снеговой нагрузки, определенной по соответствующим нормам США для теплой скользкой кровли («*warm slippery roof*»);
- обеспечением таяния снега, в том числе и за счет специальной системы нагрева, которая должна иметь возможность работы от резервного генератора.

Похожие рекомендации имеются в п. 5.12 свода правил по проектированию тентовых конструкций [79], согласно которым допускается не учитывать в расчетах

снеговую нагрузку при наличии системы обогрева, обеспечивающей температуру поверхности мягкой оболочки не менее 2°C, однако, при этом деформированная поверхность оболочки должна исключать возможность образования водяных мешков (п. 5.11).

1.2.4.4. Ветровая нагрузка. Аэроупругость воздухоопорных оболочек

Весьма подробные обзоры литературы по изучению ветровых воздействий на здания и сооружения можно найти в работах [29, 28, 43, 89, 9]. Кроме того, в книге [10] приводятся методы определения ветровой нагрузки по отечественной и зарубежной нормативным методикам [119], рассматриваются явления, связанные с аэроупругими колебаниями гибких конструкций.

Следует отметить, что сложная структура пограничного слоя атмосферы, неравномерность городской застройки, высокая степень турбулентности воздуха вблизи поверхности земли приводит к тому, что пространственно-временной характер ветровой нагрузки весьма плохо поддается описанию, а вопрос нормирования ветровой нагрузки решается по-разному в различных странах [78, 119].

В данной диссертации обратимся к особенностям расчета именно воздухоопорных сооружений на действие ветра.

Поведение воздухоопорных оболочек в потоке воздуха интересовало многих специалистов как в нашей стране, так и за рубежом, поскольку именно ветровая нагрузка является для таких сооружений основной, и нередко приводит к их разрушению [32]. Изучению действия ветровой нагрузки на воздухоопорные сооружения посвящены следующие работы [56, 20, 31, 74, 47]. В работе [131] решается задача двусторонне связанная деформирования мембранной конструкции типа *ARIES* при ветровом воздействии, показана значимость проведения расчета в двусторонне связанной постановке. Решению связанных задач деформирования мембранных конструкций также посвящена значительная часть книги [151].

Как правило, распределение ветровой нагрузки по поверхности оболочки определяется аэродинамическим коэффициентом C_e [78, 119], в данной работе для него принято обозначение C_p , по аналогии с научными работами других авторов [52]. Определение величины и закона распределения этого коэффициента, как правило, проводится с помощью экспериментальных исследований объектов в аэродинамических трубах [72]. Но даже для твердых объектов простой формы результаты экспериментов могут давать значительные расхождения [73].

Эксперименты по продувке жестких и мягких моделей воздухоопорных оболочек в аэродинамических трубах проводились многими отечественными [2, 7, 32, 68, 75] и зарубежными исследователями [130, 139, 148, 118, 129, 147]. Однако, в мелкомасштабных моделях удастся добиться только частичного подобия модели реальным условиям, кроме того, измерительное оборудование может существенно искажать характеристики испытываемых конструкций.

Все возрастающую роль в определении аэродинамических коэффициентов играет численное моделирование обтекания различных объектов и конструкций [9, 24, 25, 137, 152, 121, 136], несмотря на объективные сложности, которые возникают при проведении подобных исследований [18, 17].

Как уже говорилось выше, перемещения оболочек не нормируются (п. 3.1 [76] «Деформации оболочек не проверяются»), однако, в [76] есть указание: «Размещение оборудования или складирование материалов на расстоянии ближе 1 м от внутренней поверхности оболочки не допускается», это требование одинаково для оболочек любого пролета и подъемистости. Реальные перемещения под действием ветровой нагрузки могут значительно превышать эту величину, что при близком расположении металлических ограждений, аналогичных показанным на рисунке 1.4, вполне может привести к разрыву оболочки.

В руководстве [120] указано, что воздухоопорные оболочки в силу высокого демпфирования не подвержены явлениям динамической неустойчивости, что согласуется с результатами экспериментальных исследований, описанных в работе [129], где говорится, что низкочастотные колебания связаны с образованием

турбулентного следа за воздухоопорным сооружением, но они не сопровождаются резонансными явлениями.

Однако, в связи с существенным деформированием распределение нагрузки меняется в процессе нагружения как по величине, так и по направлению. То есть, задача расчета воздухоопорной оболочки на действие ветрового потока является связанной. Однако, в аэродинамическом эксперименте можно достичь только частичного подобия модели и реальной конструкции [9]. Корректное экспериментальное моделирование аэроупругого поведения реальных большепролетных сооружений еще более трудноосуществимо и дорого, чем простой аэродинамический эксперимент, поскольку даже расположение традиционной системы датчиков и измерительных приборов может исказить механическое поведение модели. Поэтому численное (компьютерное) моделирование мягких оболочек в потоке воздуха является актуальным, а в комплексе с экспериментальными исследованиями может существенно помочь в понимании и предсказании поведения подобных конструкций под действием ветровой нагрузки (более подробно данный вопрос освещается в главе 4).

1.3. Методы расчета оболочек воздухоопорных сооружений

В нашей стране существует несколько научных школ или, можно сказать, центров, ученые в которых занимаются изучением мягких оболочек.

Одной из первых возникла Дальневосточная научная школа мягких оболочек. Она создавалась на базе кафедры теории и устройства судов ДВВИМУ под руководством В.Э. Магулы [56, 57]. Представителями данной научной школы являются Б.И. Друзь, И.Б. Друзь [27], В.Д. Кулагин, А.И. Азовцев, С.А. Огай, В.А. Хованец [91] и многие другие. С 1967 года издаются сборники научных работ – Сообщения лаборатории мягких оболочек, в которых публиковались передовые научные статьи, например, [68], один раз в несколько лет проводились

Дальневосточные конференции по мягким оболочкам. Большая научная работа проделана сотрудниками ДВВИМУ (ныне Морской государственный университет имени адмирала Г. И. Невельского) как в разработке теории мягких оболочек, см., например, [57, 27], так и в решении практических задач.

Большое количество работ по нелинейным расчетам оболочечных конструкций выполнено под руководством К.Ф. Черныха в Санкт-Петербурге. Следует отметить, например, диссертацию К.М. Кылатчанова [52], в которой решаются не только задачи о рациональном раскрое мягких оболочек, но и получено решение для задачи аэроупругого взаимодействия мягкой цилиндрической оболочки с потоком воздуха.

Существенная работа сначала по разработке общей, а затем технической теории мягких оболочек велась на базе МВТУ им. Баумана в Москве под руководством С.А. Алексеева [3], затем В.И. Усюкина [86]. Уже в 1970-е годы А.М. Смирнов и П.И. Кононенко (аспиранты С.А. Алексеева) занимались изучением аэроупругого поведения мягких сферических воздухоопорных оболочек в потоке воздуха [74, 47] не только теоретически, но и экспериментально [2].

Большая научно-практическая работа велась профессором МАРХИ В.В. Ермоловым [32, 33, 31, 35, 34]. Им возведен один из первых воздухоопорных куполов в нашей стране в 1959 году. Книги, написанные им более 30 лет назад во многих вопросах остаются актуальными и в настоящее время.

Трудно выделить одну научную школу в Казани, поскольку научная работа ведется в разных направлениях: изучением долговечности и прогнозированием срока службы пленочно-тканевых материалов занимаются В.Н. Куприянов, А.М. Сулейманов, Н.С. Шелихов; Е.М. Удлер ведет научную работу по изучению формообразования и автоматизированного проектирования тентовых конструкций [84]; построением новых математических моделей и другими теоретическими разработками в области статики и динамики мягких оболочек в разное время занимались В.В. Ридель [71], Р.Ш. Гимадиев, А.Н. Гильманов, Б.В. Гулин, М.А. Ильгамов и др.

Долгие годы ведется научная работа по изучению физико-механических и прочностных свойств материалов для мягких оболочек В.П. Шпаковым и другими сотрудниками НИИ резиновой промышленности в Сергиевом Посаде [98]. Ими проведены уникальные многолетние натурные испытания многих образцов из прорезиненных тканей, разработаны собственные методы двухосных испытаний тканевых материалов, исследованы различные типы соединений и швов и др.

Отдельного внимания заслуживает научная школа, созданная на базе НИИ Парашютостроения в Москве. В течение многих лет О.В. Рысевым, В.И. Морозовым, Ю.В. Мосеевым, А.Т. Пономаревым, В.В. Лялиным [55] и др. ведется напряженная научная работа по изучению сложнейших процессов раскрытия и деформирования мягких оболочек парашютов, разрабатываются математические модели парашютных систем, численные методики решения задач формообразования, аэродинамики, аэроупругости и прочности парашютов, а также программные средства, реализующие эти методики.

Саратовскими учеными под руководством А.Ю. Кима и в настоящее время ведутся разработки оригинальных численных методик расчета воздухоопорных, мембранно-стержневых [44, 64] и комбинированных конструкций с помощью метода продолжения решения по параметру, детально описанному в работе [23].

Большая научная работа по изучению комбинированных мембранно-стержневых и пневматических конструкций ведется на кафедре строительного производства Липецкого государственного технического университета под руководством профессора В.В. Михайлова. Сотрудники и аспиранты кафедры неоднократно представляли доклады на международных конференциях «*International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures*» [108, 141, 142].

В.В. Михайловым выпущено учебное пособие [60], в котором рассмотрены основные вопросы конструирования и расчета предварительно напряженных комбинированных и вантовых конструкций, а также совместно с А.В. Чесноковым книга [97], посвященная вопросам статического анализа облегченных

строительных конструкций, в ней приводятся результаты исследований комбинированных и тросовых купольных систем, а также пневматических оболочек с учётом изменения жесткости материала под нагрузкой.

Расчетами комбинированных мембранно-стержневых систем с учетом геометрической и конструктивной нелинейности в своих диссертациях занимались А.В. Чесноков [95], Е.А. Хорошилов [93]. Результаты расчетов обязательно сопоставлялись с экспериментальными исследованиями.

В Нижнем Новгороде интенсивная научная работа ведется по изучению формообразования мягких оболочек методом натянутых сеток Е.В. Поповым [69], В.Н. Шалимовым и др., в частности разработан программный комплекс автоматизированного проектирования тентовых конструкций «КЗ-ТЕНТ».

Можно сделать следующий вывод: для анализа напряженно-деформированного состояния воздухоопорных оболочек можно выделить два пути:

- первый путь связан с применением развитой теории расчета мягких оболочек для получения определяющей системы дифференциальных уравнений задачи, а затем, в связи со сложностью системы, привлекаются численные методы для решения этой системы, разрабатываются программы для решения конкретно сформулированных и поставленных краевых задач. Такому подходу свойственно применение аналитических методов на первом этапе и метода конечных разностей на завершающем. В целом, большое количество работ советских ученых построены по такой схеме.

- второй путь возник уже после широкого становления метода конечных элементов и заключается в модификации его для решения задач деформирования мягких оболочек: разработкой специальных «мембранных» типов конечных элементов, соответствующих моделей материалов, отдельных программных модулей для поиска начальной оптимальной формы, улучшение алгоритмов решения нелинейных динамических задач и т.д. В последние годы именно второй путь получил наиболее широкое распространение за рубежом.

Следует заметить, что в последнее время граница между этими путями стирается, что, несомненно, приводит к развитию науки в целом.

1.3.1. Аналитические методы и решения

Большая работа проделана по построению общей теории расчета мягких оболочек и мембран такими отечественными учеными как С.А. Алексеев, В.Л. Бидерман, Б.И. Друзь, И.Б. Друзь, В.Д. Кулагин, А.С. Григорьев, М.А. Ильгамов, В.Э. Магула, В.И. Усюкин, К.Ф. Черных и др., а также зарубежными специалистами Р. Тростелем [65], К. Ишии [33, 126], Р. Харнахом [33], Э. Хаугом [136], Е. Onate [151], К.-У. Bletzinger [109] и др.

В работе [3] С.А. Алексеев приведены основные соотношения общей теории мягких оболочек, а также провел классификацию задач, которые возникают при расчетах конструкций из мягких оболочек, указал пути решения задач всех типов.

В работе [57] В.Э. Магула для расчета мягких геометрически изменяемых оболочек, не вводя понятия «начальная форма», составил систему из 11 дифференциальных уравнений (три уравнения равновесия, три условия Петерсона-Кодацци и Гаусса, три уравнения физических соотношений и два связи координат) для нахождения следующих 11 неизвестных:

- трех погонных компонентов внутренних усилий – нормальных и касательных (T_1, T_2, S);
- двух коэффициентов первой квадратичной формы деформированной поверхности (A, B),
- трех коэффициентов второй квадратичной формы (L, M, N);
- одного координатного угла χ ;
- двух степеней удлинения элемента в направлении первой и второй координаты (λ_1 и λ_2).

Система предназначена для определения напряженно-деформированного состояния геометрически изменяемых и неизменяемых мягких оболочек и дает полное о нем представление при известных геометрических и статических граничных условиях [32].

Однако ее решение в замкнутом виде не представляется возможным.

В книге [86] приводятся геометрические соотношения и уравнения равновесия мягких оболочек, основанные на общих выражениях нелинейной теории упругости учитывающие большие деформации и перемещения. В этой же книге приводится описание технической теории мягких оболочек (справедливая при малых деформациях), суть которой сводится к выделению в деформированном состоянии оболочки основного состояния (усилия для которого могут быть найдены из линейной безмоментной теории) и линеаризованного относительно него дополнительного.

Несмотря на математическую сложность применения аналитических методов, в целом возможно их применение для решения даже связанных задач, но в сильно упрощенной постановке и для оболочек канонических форм. Например, в работе [52] с помощью метода коллокаций была решена задача обтекания круговой цилиндрической оболочки в двухмерной постановке.

В работах [74, 47] для решения уравнений равновесия оболочек используется разложение в тригонометрические ряды как неизвестных функций, так и действующей нагрузки, однако, полученные выражения всё равно

Кроме того, с помощью аналитических методов расчета весьма проблематично учесть наличие швов в оболочке, наличие которых может существенно исказить картину распределения усилий [33]

Также следует отметить, что в практических задачах, которые требуют не просто составления дифференциальных уравнений, но и доведения результата «до числа», зачастую прибегают к решению дифференциальных уравнений с помощью различных численных процедур. Этому способствует существенное расширение

возможностей современных персональных компьютеров и программного обеспечения.

1.3.2. Численные методы

С середины XX века на различных симпозиумах и конференциях стали всё чаще появляться доклады, посвященные преимуществам и примерам применения численных методов расчета оболочечных конструкций и воздухоопорных оболочек в частности [35, 34]. Как правило, среди численных методов применяются два – метод конечных элементов и метод конечных разностей. Существуют и другие методы, но они имеют существенно более узкую область применения и распространения. В качестве примера, укажем использование вариационно-разностного метода к расчету мембраны на прямоугольном контуре описано в работе [82].

1.3.2.1. Метод конечных разностей

Обзоры литературы по применению численных методов для расчетов конструкций из мягких оболочек можно найти в работах [36, 91].

Данный метод к расчету воздухоопорных сооружений применял В.И. Усюкин [32, 33].

Основная идея метода состоит в замене дифференциальных уравнений приближенными алгебраическими формулами (конечно-разностными аппроксимациями), вычисляемыми для значений функций в заранее определенных точках, т.н. узлах расчетной сетки. Таким образом система дифференциальных уравнений сводится к системе алгебраических, что позволяет получить приближенное решение.

Обзор работ, в которых МКР применялся для расчета мягких оболочек можно найти в [36]. Применение МКР и разработка на его основе программных средств для моделирования поведения парашютов описано в работах [13, 55].

В настоящее время, в связи с тем, что МКР требует сложных процедур задания граничных условий на криволинейных границах [91], этот метод используется для пространственной дискретизации только задач с тривиальной геометрией, но часто применяется к временной дискретизации, в том числе и в комбинации с методом конечных элементов или методом контрольных объемов. Также замена производных по времени конечно-разностными аналогами производится при явной схеме интегрирования уравнений движения. Пример расчета мягкой оболочки в виде подушки безопасности в автомобиле, а также несколько тестовых примеров расчета мягких оболочек из тканей можно найти в работе [110].

В работе [44] говорится, что МКР получил наиболее широкое развитие в 60-70-е гг. XX века, то есть до широкого распространения ЭВМ и развития универсальных расчетных комплексов на базе метода конечных элементов.

1.3.2.2. Метод конечных элементов

Одним из наиболее эффективных и универсальных современных методов численного решения инженерных задач по расчету строительных конструкций и сооружений является метод конечных элементов (МКЭ) [12, 42, 81].

Идея представления сплошной среды в виде системы элементов конечных размеров высказывалась еще в начале XIX в. Пуассоном. Развитие МКЭ шло по двум направлениям. С одной стороны, МКЭ развивался как некоторая разновидность вариационно-разностного метода решения задач математической физики. С другой стороны, он разрабатывался на основе методов строительной механики стержневых систем, и в частности, матричного метода перемещений. Метод конечных элементов сочетает в себе универсальность алгоритмов решения различных краевых задач с эффективностью компьютерной реализации вычислений [12], поэтому он получил быстрое развитие в связи с созданием и распространением высокопроизводительных вычислительных машин [81].

Главный принцип, на котором он основан – это замена рассмотрения реальной конструкции с бесконечным числом степеней свободы анализом системы с конечным (порой весьма большим) числом степеней свободы.

Одной из наиболее подробных работ и в то же время современных работ по МКЭ является книга К.-Ю. Бате [6], в которой описание алгоритмов и различных процедур метода иллюстрируется множеством примеров и задач.

Особенностям (в том числе «ошибкам и ловушкам») использования МКЭ для решения задач расчета строительных конструкций в отечественной практике посвящена книга [66]. Следует отметить, что наиболее глубокого понимания природы метода достигают именно разработчики различных программных комплексов, которыми и являются авторы упомянутых выше книг [6, 66].

Впервые для расчета пневматических конструкций МКЭ применили Дж. Оден и В. Кубица в 1967 году [140], а уже в 1974 в работе [133] описан вариант программы, реализующей МКЭ, учитывающей в расчете оболочки усиление в виде тросовой сетки. Следует отметить, что расчеты выполнялись в статической постановке на определенные заранее нагрузки.

Уже в 1990-е гг. на основе анализа почти 120 работ в статье [36] говорится, что предпочтение в расчете конструкций из мягких оболочек отдавалось именно методу конечных элементов.

В работе [44] рекомендуется расчет мембранно-пневматических систем на действие статических и динамических нагрузок рекомендуется производить именно по дискретным расчетным схемам итерационным методом приращений параметров с поэтапным применением метода конечных элементов.

МКЭ завоевал широкую популярность за рубежом в связи с опережающим развитием и распространением мощных компьютеров, а также наличием мощных универсальных программных средств, таких как ANSYS, ABAQUS, COMSOL Multifisics, которые приспособлены для решения междисциплинарных задач.

Более 40 лет занимается расчетами мягких оболочек с помощью МКЭ известный ученый Э. Хауг (*E. Haug*) [33, 136]. И если в ранних работах рассматриваемые задачи были весьма просты (отыскание оптимальной равновесной формы с помощью так называемых «пленочных» элементов, поиск упрощенной модели материала оболочки, который тем не менее позволял бы

учесть нелинейное взаимодействие нитей основы и утка и др.), то в последнее время область интересов ученого лежит в численном и экспериментальном исследовании аэроупругого взаимодействия тентовых конструкций с турбулентным потоком воздуха, учет интерференционных эффектов и т.п..

Решение настольно сложных задач требует задания огромного количества параметров для получения корректных результатов расчета. Поскольку область применения МКЭ все время расширяется (в частности, интересно применение МКЭ для решения задач отыскания оптимальной начальной формы мягких оболочек [109]), огромное внимание уделяется отработке новых методик путем решения тестовых задач (см., например, [84, 150]), имеющих либо альтернативное аналитическое решение, либо экспериментальное подтверждение. Примерами, статей, решение двусторонне связанных задач в которых служит эталоном для широкого круга других исследователей являются работы [122, 106].

Программные разработки, которые хорошо себя зарекомендовали в решении подобных задач, потом могут сами использоваться для получения эталонных решений или же для проверки аналитических выкладок, см., например, работы [103, 149, 106].

Кроме того, метод конечных элементов позволяет исследовать конструкцию на разных уровнях: используя для моделирования ткани двумерные конечные элементы (КЭ) малой толщины, стержневые или даже объемные КЭ для моделирования отдельных нитей [145], при этом зачастую экспериментальные данные используются для тарировки исходных параметров численных моделей, пока результаты «реального» и виртуального эксперимента не совпадут с заданной степенью точности [123, 110].

Естественно, верификация программных комплексов и расчетных методик выполняется для того, чтобы повысить надежность решений новых задач, не имеющих альтернативных результатов. На основании проделанного обзора работ, можно сделать вывод, что изучение аэроупругого поведения воздухоопорных оболочек, взаимодействующих с потоком воздуха, выполнялось многими

исследователями. Однако, как правило рассматривались оболочки сферической или цилиндрической формы различной подъемности. Как правило, решение такой задачи сопровождалось различными трудностями, для разрешения которых требовалось введение упрощающих предпосылок (отказ от учета формоизменения оболочек, упрощение закона распределения ветровой нагрузки и т.п.).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что разработка универсальной численной методики расчета воздухоопорных сооружений на действие потока воздуха с учетом ортотропных свойств материала и аэроупругого взаимодействия является актуальной задачей.

1.4. Выводы по главе 1

Проведен обзор литературы, посвященной расчету мягких и, в частности, воздухоопорных оболочек. В настоящее время для расчета воздухоопорных сооружений в основном применяется метод конечных элементов. Решения, полученные аналитически для достаточно простых задач, можно использовать для проверки (верификации) методики расчета и используемых численных моделей.

Проведен анализ нагрузок и воздействий, действующих на воздухоопорные сооружения.

Выявлены направления совершенствования существующих нормативных документов.

Обоснована актуальность и практическая значимость изучаемой темы.

Следует отметить, что приведенный обзор не претендует на исчерпывающую полноту. В нем упомянуты только те работы, которые имеют непосредственное отношение к рассматриваемым в диссертационной работе вопросам.

ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВОЗДУХООПОРНЫХ ОБОЛОЧЕК

2.1. Решение задач динамики воздухоопорных оболочек как систем с конечным числом степеней свободы

2.1.1. Основные положения метода конечных элементов

Основная идея метода состоит в представлении непрерывного материального тела в виде совокупности элементов конечного размера и простой формы (многоугольники для плоских задач или многогранники для пространственных), соединенных между собой в общих точках – узлах. Поскольку элементы не являются бесконечно малыми, то их количество, как и количество узлов является конечным числом. Если рассмотреть равновесие отдельных узлов, то мы, по сути, избежим рассмотрения системы с бесконечным числом степеней свободы, а будем рассматривать систему с конечным числом степеней свободы.

В описанном подходе искомые непрерывные величины (перемещения, напряжения, деформации и т.д.) внутри каждого конечного элемента (КЭ) выражаются с помощью аппроксимирующих функций через узловые значения этих величин, а распределенные внешние нагрузки заменяются эквивалентными узловыми силами. В математическом плане задача состоит в приведении дифференциальных уравнений или условия минимума энергетического функционала, описывающих рассматриваемую конструкцию, к системе алгебраических уравнений, решение которой дает значения искомых узловых неизвестных [81].

Справиться с решением больших систем уравнений удалось с помощью применения вычислительной техники. В настоящее время системы из нескольких

миллионов уравнений являются вполне посильной задачей даже для персональных компьютеров.

Однако, для рационального использования вычислительных мощностей и корректной организации алгоритмов метода конечных элементов необходимо соответствующее программное обеспечение.

На базе конечно-элементного подхода разработано большое количество мощных программных комплексов. Среди них можно выделить программные комплексы, которые используются при расчете строительных конструкций и сооружений: Лира-САПР, SCAD, STARK ES, MicroFe, Sofistik, Autodesk Robot Structural Analysis, ABAQUS, ANSYS, Nastran и др. Большинство из них имеет обширную библиотеку конечных элементов и дает возможность выполнять расчеты на прочность, устойчивость и колебания, учитывать физическую и геометрическую нелинейности, ортотропию материала, температурные нагрузки и т. д.

Наибольшее распространение в практике расчета и проектирования строительных конструкций получил вариант МКЭ в перемещениях, когда в качестве искомым неизвестных принимаются перемещения узлов рассчитываемой системы [81].

Для расчета конструкций в рамках МКЭ используется следующий подход основанный на принципе Лагранжа: записывается условие стационарности полной потенциальной энергии системы, связанной с работой внутренних сил и внешней приложенной нагрузки и представляющей собой.

Рассмотрим основные этапы расчета конструкций с помощью МКЭ.

2.1.1.1. Дискретизация области

Рассчитываемая конструкция разбивается воображаемыми точками, линиями или поверхностями на конечные элементы. Другими словами, строится расчетная сетка. Разбиение области на конечные элементы должно выполняться с учетом задачи, которую необходимо решить. Поскольку значения искомой величины вычисляются только в узлах конечных элементов, то чем их больше, тем точнее

решение. Однако, для выполнения расчетов за приемлемое время количество конечных элементов (и узлов) следует ограничивать. Как правило, в местах значительных градиентов искомой величины назначают меньший размер сетки конечных элементов (например, вблизи концентраторов напряжений). В тех местах, где искомая величина слабо изменяется, размер КЭ можно увеличивать без существенной потери точности.

Следует отметить, что некорректное построение расчетной сетки может привести к ошибочным результатам. Во избежание подобных ошибок расчеты производят на сетках различной размерности.

2.1.1.2. Построение интерполирующих функций

Для более точного представления искомой величины (перемещений) может быть использовано не только сгущение расчетной сетки, но и более точные интерполирующие функции. Они служат для того, чтобы по известным величинам перемещений узлов получить перемещения на линиях между узлами (ребрах конечных элементов), а также внутри самих КЭ. Система интерполирующих функций выбирается так, чтобы обеспечить непрерывность искомых величин вдоль границ элемента [12]

На основе выбранной системы интерполирующих функций выводятся зависимости между деформациями и перемещениями (геометрические соотношения), а также между напряжениями и деформациями (физические соотношения).

Запишем перемещения, являющиеся функциями координат произвольной точки конечного элемента, через компоненты вектора узловых перемещений с помощью интерполирующей функции (функции формы или базисной функции) [81]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nz}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \dots \quad \mathbf{N}_s]$ – матрица функции формы;

$\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_s\}^T$ – вектор узловых перемещений конечного элемента (КЭ);

s – количество степеней свободы КЭ.

Функции (2.1) должны удовлетворять критериям полноты и совместности.

В общем случае, для четырехузлового конечного элемента типа *Shell181* (см. рисунок 2.1), используемого в данной диссертационной работе выражение для некоторой величины φ во внутренней точке конечного элемента с номерами узлов I, J, K, L выражается следующим образом [100]:

$$\varphi = 0.25 \left[\varphi_I (1-s)(1-t) + \varphi_J (1+s)(1-t) + \varphi_K (1+s)(1+t) + \varphi_L (1-s)(1+t) \right], \quad (2.2)$$

где s, t – координаты точки внутри элемента;

$\varphi_I, \varphi_J, \varphi_K, \varphi_L$ – значения величины φ в узлах I, J, K, L соответственно.

Координаты s и t вводятся следующим образом:

$$s_I = -1, t_I = -1; s_J = 1, t_J = -1; s_K = 1, t_K = 1; s_L = -1, t_L = 1.$$

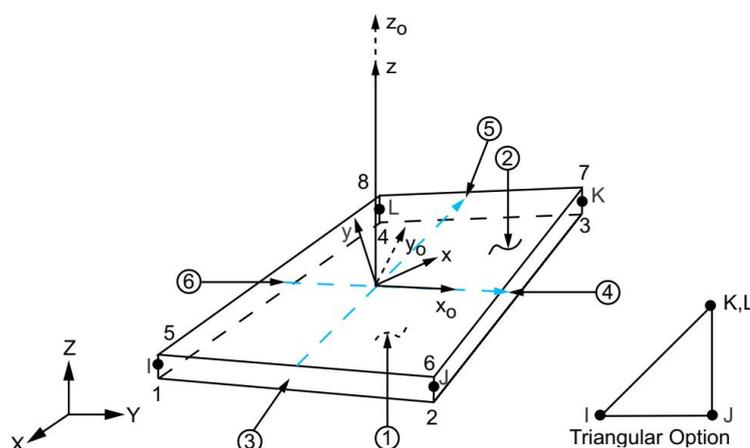


Рисунок 2.1 Геометрия конечного элемента типа *Shell181* [101]

В данной работе для моделирования воздухоопорных оболочек используются трехузловые конечные элементы типа *Shell181*. В этом случае узлы K и L считаются совпадающими, при этом полагается $s_K = s_L = 0, t_K = t_L = 1$.

Дополнительно отметим, что местные оси конечных элементов могут быть повернуты на определенный угол, что необходимо, например, для согласования направления механических свойств (направлений основы и утка) у нескольких или всех конечных элементов (см. рисунок 2.7).

2.1.1.3. Вывод основных геометрических и физических соотношений

В общем виде зависимость между деформациями и перемещениями записывается следующим образом [81]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{z}, \quad (2.3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор деформаций;

\mathbf{z} – вектор узловых перемещений;

\mathbf{B} – матрица, связывающая вектор узловых перемещений с вектором деформаций.

Физические соотношения, определяющие зависимость между напряжениями и деформациями, имеют вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор напряжений;

\mathbf{D} – матрица упругости (подробнее см. п. 2.1.2).

Следует заметить, что в данной работе использовался конечный элемент типа *Shell181* со значением параметра $keyopt(3) = 2$, что приводило к вычислению деформаций и напряжений в 4-х точках на каждом элементе, позволяя использовать более грубое разбиение оболочки на конечные элементы [100].

Кроме того, поскольку нормальные напряжения пропорциональны линейным деформациям, которые в свою очередь определяются по соотношениям Коши как первые производные соответствующих перемещений, то погрешность в вычислении мембранных усилий, обусловленная однократным выполнением операции численного дифференцирования. Указанная проблема более характерна для оболочек, обладающей изгибной жесткостью, где для достижения практической сходимости решения по моментам и поперечным силам требуется либо использование высокоточных конечных элементов, либо существенное сгущение сетки в зонах высоких градиентов указанных усилий.

2.1.1.4. Построение матрицы жесткости конечного элемента

С помощью принципа Лагранжа на основе полученных геометрических и физических соотношений строится матрица жесткости конечного элемента.

Первоначально матрица жесткости строится в местной системе координат. Перед тем, как включить эту матрицу в глобальную матрицу жесткости всей конструкции, ее необходимо преобразовать из местной системы координат в глобальную систему координат, общую для всей конструкции [81].

2.1.1.5. Получение системы разрешающих уравнений МКЭ

Глобальная матрица жесткости формируется из матриц жесткости отдельных конечных элементов. Система алгебраических уравнений всей конструкции (уравнения равновесия) имеет следующий вид [12, 42, 81]:

$$\mathbf{Kz} = \mathbf{P} \quad (2.5)$$

где \mathbf{K} – матрица жесткости системы (ансамбля) конечных элементов (глобальная);

\mathbf{z} – вектор неизвестных узловых перемещений;

\mathbf{P} – вектор узловых нагрузок.

Граничные условия учитываются в матрице жесткости \mathbf{K} , так как в противном случае эта матрица будет вырожденной.

2.1.1.6. Решение системы алгебраических уравнений

Как правило, матрица жесткости обладает симметрией и ленточной структурой, что позволяет построить эффективные численные алгоритмы для решения системы уравнений [66].

В случае геометрической нелинейности, имеющей прямое отношение к задачам, рассмотренным в данной работе, для решения системы уравнений применяется итерационный метод Ньютона-Рафсона [12, 81, 6, 100].

2.1.1.7. Определение деформаций и напряжений

В результате решения системы уравнений (2.5) определяется вектор узловых перемещений всей конструкции. На основе найденных значений узловых перемещений по формуле (2.3) определяется вектор деформаций в КЭ, а по формуле (2.4) – вектор напряжений.

2.1.2. Выбор модели материала для воздухоопорных оболочек

Выбор модели материала для численного моделирования конструкций, изготовленных из технической ткани с покрытием, является важной составляющей в проектировании мягких оболочечных конструкций.

Следует разделить модель самой технической ткани и модель материала (физические соотношения), используемые в расчетах.

Среди моделей технических тканей с покрытием выделяют две группы [51]:

- сплошные, непрерывные (*continuum*);
- отдельные, дискретные (*discrete*).

В первом случае техническая ткань представляется единой сплошной двумерной средой, характеристики которой получаются путем осреднения механических характеристик материала нитей и покрытия (гомогенизации). Такое представление материала называют моделированием на мезоуровне (*mesolevel*). Данный подход позволяет учесть только плоское напряженное состояние.

Во втором случае нити и покрытие моделируются отдельно, при этом для нитей могут использоваться как трехмерные объемные [45], так и стержневые модели [127, 145]. Такой подход называется моделированием ткани на микроуровне, как правило он применяется для точного моделирования поведения материала при испытаниях на разрыв, то есть во всем диапазоне напряжений. При такой постановке задачи появляется возможность лучше понять механизм взаимодействия компонентов ткани, однако требуется гораздо больше информации: физико-механические характеристики нитей, покрытия, особенности переплетения, технологии изготовления и др. Данный подход не применим к моделированию строительных большепролетных сооружений, поскольку максимальный размер элементов, используемых для моделирования структурных особенностей ткани имеет порядок 0.01-1 мм, что приводит к недопустимому повышению размерности задачи.

Подробное описание различных моделей материала можно найти в работе [51]. На основании вышесказанного в настоящей работе использована сплошная модель технической ткани с покрытием.

На рисунке 2.2 показаны результаты лабораторных одноосных испытаний образцов технической ткани с покрытием, проведенных с участием автора. На данном графике наглядно прослеживается физическая нелинейность и анизотропия механических свойств. Образцы ткани вырезались под разными углами к нитям основы, этот угол обозначен на графиках.

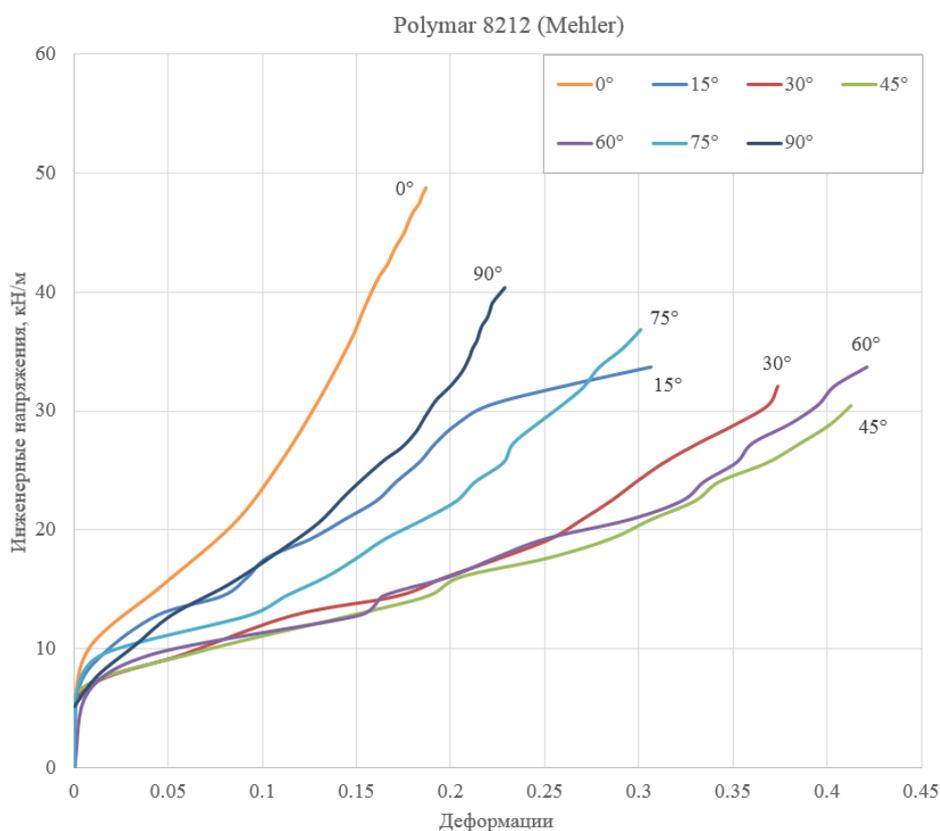


Рисунок 2.2 Результаты одноосных испытаний на разрыв технической ткани с покрытием Polymar 8212

Как уже упоминалось, в силу технологических особенностей изготовления тканей, в них можно выделить два направления – вдоль нитей основы (0°), которые натягиваются в процессе переплетения, и перпендикулярное нитям основы направление нитей утка (90°). Поскольку толщина ткани чрезвычайно мала по сравнению с пролетом, то физические свойства по толщине можно принять

постоянными. Таким образом в материале выделяются три взаимно перпендикулярных плоскости упругой симметрии, значит, его можно отнести к ортотропным [4].

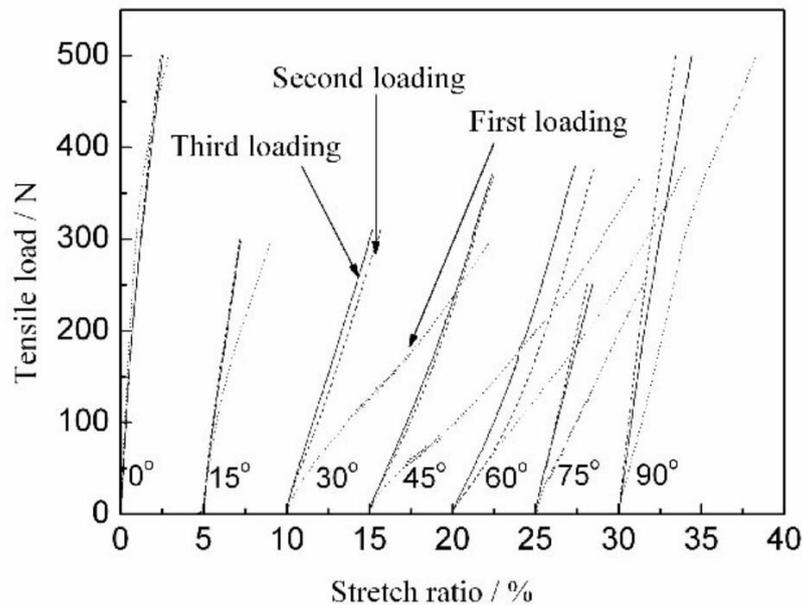


Рисунок 2.3 Результаты одноосных испытаний технической ткани с покрытием при трехкратном нагружении [114]

На рисунке приведены результаты трехкратных испытаний технической ткани с покрытием [113], можно заметить, что сильная физическая нелинейность материала для технических тканей с ПВХ покрытием наблюдается только при первом нагружении, при последующих нагружениях материал ведет себя почти линейно. На рисунке 2.4 показаны результаты испытаний технической ткани с покрытием при циклическом нагружении [99]. Черным цветом показаны линии, которые имеют практически одинаковый наклон и достаточно хорошо аппроксимируют результаты. Угол наклона этих линий можно принять за модуль упругости материала в направлении нитей основы.

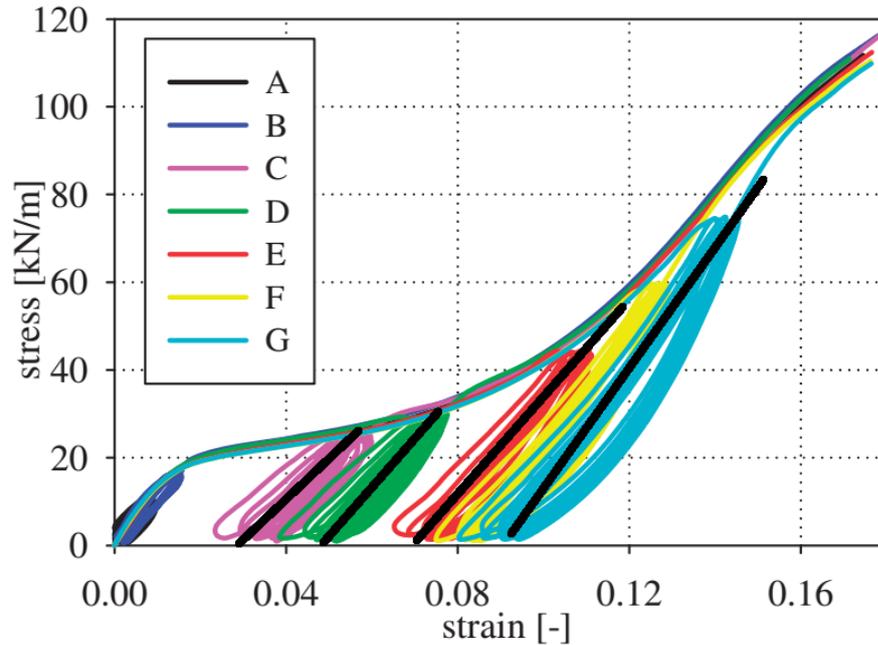


Рисунок 2.4 Результаты одноосных испытаний технической ткани с покрытием (вдоль основы) при циклическом нагружении [99]

Таким образом, можно заметить, что после многократных нагружений в материале остаются необратимые (пластические) деформации, однако его модуль деформации практически не меняется в дальнейшем.

В российском своде правил по проектированию строительных тентовых конструкций [79] предлагается линейно-упругая ортотропная модель для материала (п. 5.7). Методика определения модулей упругости по основе и утку приведена в приложении Г.

Определение модулей упругости по основе и утку производится по диаграммам «напряжение – деформация», полученным в результате лабораторных испытаний полос материала на одноосное растяжение. Полосы вырезаются по направлению основы и утка.

Модули упругости по основе E_o и по утку E_y должны определяться как секущие модули упругости в диапазоне рабочих напряжений σ_1 и σ_2 по формулам Г.1 и Г.2:

$$E_o = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_{2o} - \varepsilon_{1o}} = \tan \alpha_o; \quad (\text{Г.1})$$

$$E_y = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_{2y} - \varepsilon_{1y}} = \tan \alpha_y. \quad (\Gamma.1)$$

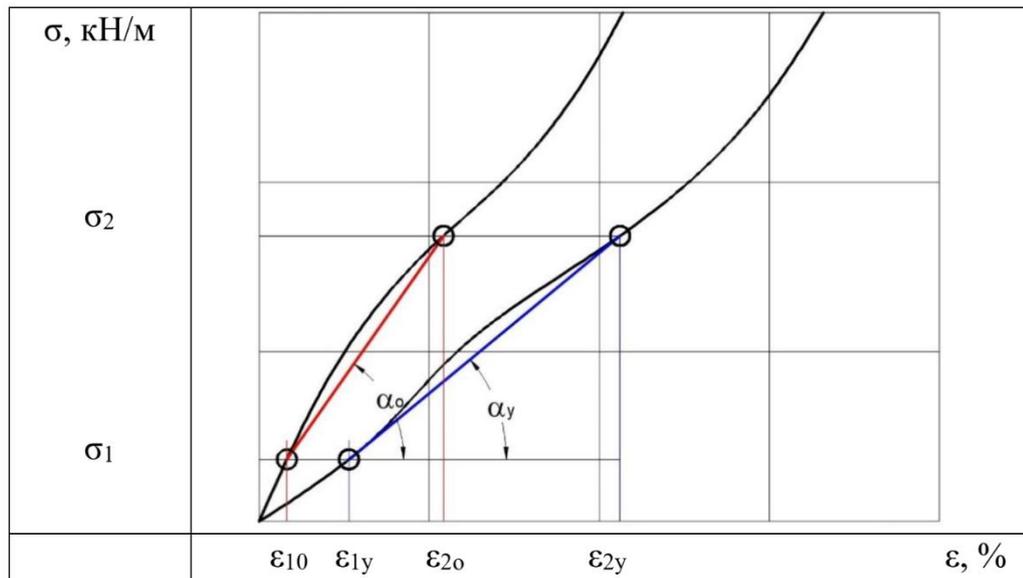


Рисунок 2.5 Определение модулей упругости по основе и утку по диаграммам «напряжение – деформация», полученным в результате лабораторных испытаний материала на одноосное растяжение (Рисунок Г.2 [79])

Для определения минимального напряжения σ_1 в воздухоопорных сооружениях достаточно произвести расчет на действие внутреннего избыточного давления. В качестве максимального напряжения σ_2 можно использовать расчетное сопротивление материала R_p , вычисленное согласно п. 5.9-5.10 [79]. В частности, для материалов с полиэфирной текстильной основой и ПВХ покрытием σ_2 можно принять равным 20.83% от нормативного сопротивления $R_{\text{норм}}$.

Аналогичный подход используется и за рубежом, в частности, в США [105]. На рисунке 2.6 показаны графики для результатов двухосных испытаний технической ткани с покрытием, приведенные в нормативном документе [105].

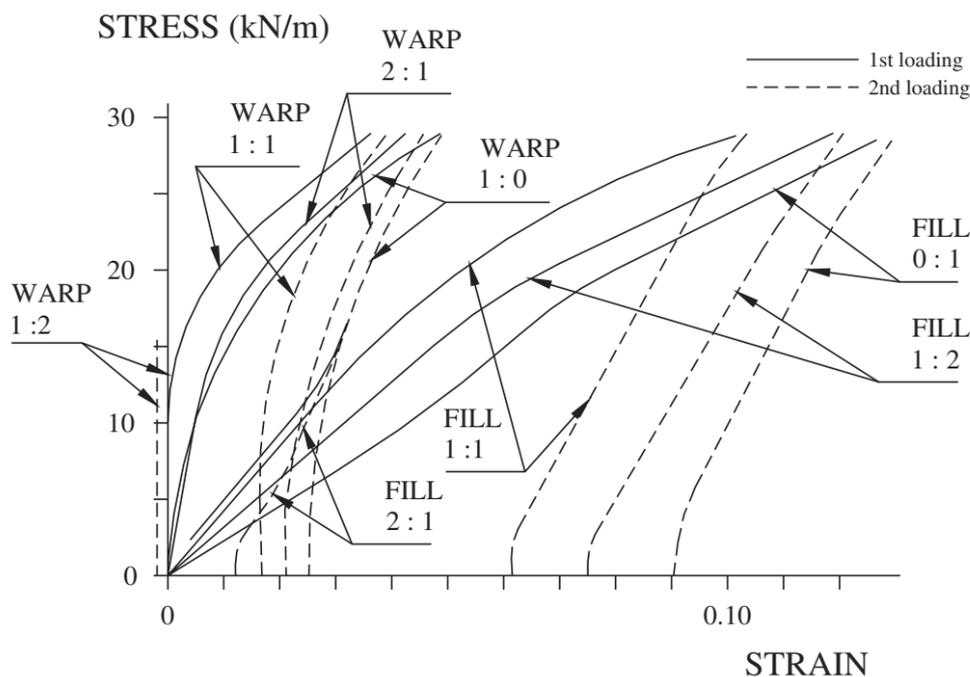


Рисунок 2.6 Результаты двухосных испытаний технической ткани с покрытием в соответствии с ASCE/SEI 55-16 [105]

В приложении «В» [105], где приведены указанные графики, содержатся указания по вычислению модулей упругости по диаграммам деформирования, приводится пример таких вычислений, т.е. предлагается пользоваться линейно-упругой ортотропной моделью.

Обратим внимание, что при расчетах воздухоопорных сооружений суммарный коэффициент запаса составляет не менее 2.5, а, значит, что напряжения не должны превышать 40% (в некоторых случаях и менее) от разрывной прочности. Таким образом, вполне допустимо принять линейно упругую ортотропную модель материала, поэтому уравнение (2.4) представляет собой закон Гука для ортотропного тела.

Расчеты, проведенные для оболочки в форме гиперболического параболоида с использованием ортотропных линейной и физически-нелинейных моделей, в целом, показали достаточную близость результатов численного моделирования к экспериментальным данным [38].

Однако для построения нелинейных моделей требуется значительно более сложное оборудование и увеличенное количество экспериментальных исследований [107], для определения значений большого количества параметров модели.

Запишем его в матричной форме для двумерных КЭ оболочек, у которых местные оси выровнены с осями ортотропии материала [1]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где ε_{12} , ε_{21} – линейные деформации в направлениях основы и утка;

γ_{12} – угловая деформация;

E_1 , E_2 – модули упругости в направлениях основы и утка соответственно;

G_{12} – модуль сдвига;

ν_{12} , ν_{21} – коэффициенты Пуассона.

Модули упругости в обоих направлениях целесообразно принимать по результатам циклических испытаний.

Вопросу определения модуля сдвига для технических тканей с покрытием посвящена работа [116].

Определение коэффициента Пуассона для тканей при одноосных и двухосных испытаниях описано в работе [128].

Разработка нелинейных анизотропных моделей материала для тканей продолжается, примером может служить работа [123].

Важным этапом является задание ориентации местных осей конечных элементов по отношению к конструкции, поскольку технология изготовления воздухоопорной оболочки подразумевает заранее определенную ориентацию нитей основы и утка. Например, для оболочки на прямоугольном плане, как правило, нити основы перпендикулярны длинным краям оболочки. Влияние

ориентации осей ортотропии на напряженно-деформированное состояние оболочек показано в работе [145], где для двух половин единой оболочки была задана различная ориентация осей ортотропии.

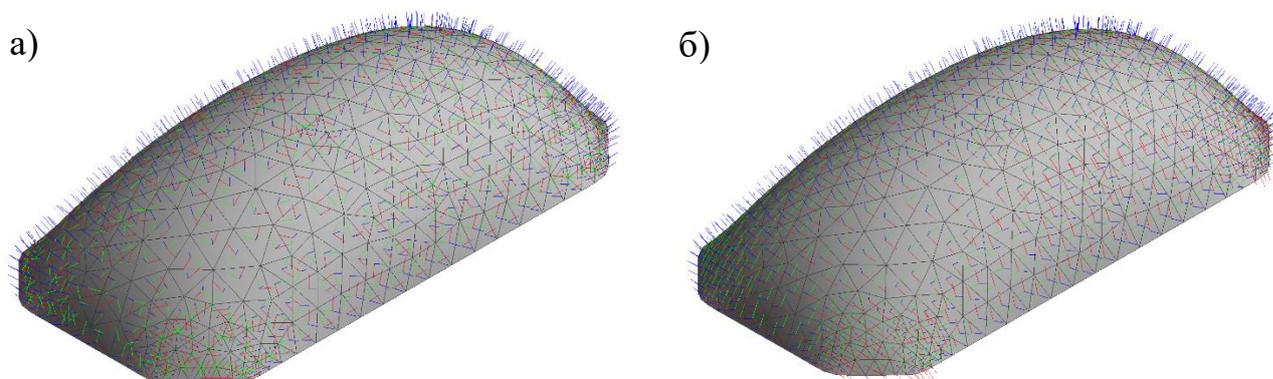


Рисунок 2.7 Направления местных осей конечных элементов:

а) до выравнивания; б) после выравнивания.

2.1.3. Динамические расчеты

2.1.3.1. Общие замечания

Поскольку возникает необходимость рассчитывать воздухоопорные сооружения с учетом геометрической нелинейности, а внешняя нагрузка от взаимодействия оболочки с потоком воздуха является достаточно сложной и заранее неизвестной функцией времени, то метод разложения движения по собственным формам для определения отклика системы на заданное воздействие, а также суперпозиция нагрузок не могут использоваться [66]. Последовательность приложения нагрузок существенным образом влияет на результат расчета. Это легко проиллюстрировать примером: представим себе деформирование воздухоопорного сооружения, к которому сначала приложена снеговая или ветровая нагрузка, а только после этого под оболочкой начали создавать избыточное давление. Очевидно, что результаты различных сценариев нагружения даже одинаковыми нагрузками будут существенно разными.

Отдельно следует выделить способ решения нелинейных статических задач путем рассмотрения динамической задачи, т.е. затухающих колебаний системы, которая стабилизируется в новом положении равновесия. Такой подход позволяет обойти проблему сходимости решения статической задачи, в частности при больших перемещениях точек системы. Например, в книге [37] показана возможность решения задач устойчивости на основании моделирования движения системы вплоть до рассмотрения закритического деформирования.

В силу указанных причин, для решения задачи деформирования воздухоопорных сооружений при действии внутреннего давления и обтекающего потока воздуха наиболее подходящим будет прямое численное интегрирование уравнений движения.

В этом случае полное время T , в течение которого происходит деформирование конструкции, разделяется на конечное количество интервалов Δt , называемых шагами. Выполнение условий динамического равновесия в любой момент времени от 0 до T заменяется требованием, чтобы уравнения динамического равновесия выполнялись только в определенные моменты времени, кратные шагу по времени ($0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, T$). Кроме того, на каждом шаге по времени производные заменяются конечно-разностными аппроксимациями на заданном шаге. В начальный момент времени положение и скорости точек системы считаются известными, затем последовательно составляются и решаются уравнения динамического равновесия в моменты времени $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, T$, так что значение перемещений, скоростей и ускорений точек системы в конце предыдущего шага по времени принимается в качестве известного для составления уравнений движения на следующем шаге.

С точки зрения механики этот процесс интерпретируется как пошаговое выполнение условий динамического равновесия в приращениях с накоплением результирующих перемещений и их производных первого и второго порядков [66].

Различают две схемы интегрирования уравнений движения: явные и неявные, в зависимости от того, в начале или конце шага неизвестные (перемещения,

скорости и ускорения точек системы) считаются неизвестными. В случае, когда условие динамического равновесия записывается с запаздыванием (в начале текущего шага по времени), используются явные схемы. Для неявных схем условие динамического равновесия записывается с опережением, т.е. в конце текущего шага по времени.

Явные схемы могут приводить к накоплению погрешности вычислений, поэтому они как правило используются для описания скоротечных процессов (таких как взрывы, резкие столкновения и т.п.), при этом для сходимости решения могут накладываться жесткие требования по величине шага по времени (т.н. условно устойчивые схемы), хотя, вычислительные процедуры на каждом шаге менее трудоемкие чем при использовании неявных схем [81, 66].

Однако, пример использования явных схем для анализа надувных тканевых конструкций – подушек безопасности в автомобилях можно найти в работе [110].

В данной диссертационной работе при решении связанных задач деформирования воздухоопорных сооружений используются метод интегрирования уравнений движения, основанный на неявной схеме, поскольку анализируемый интервал времени достаточно большой, но в то же время рассчитанная КЭ модель оболочки обладает не очень большой размерностью (порядка 10 000 узлов с тремя степенями свободы), а для материала принята линейно-упругая модель, поэтому время выполнения численных процедур по обращению матриц на каждом шаге интегрирования не является критичным.

2.1.3.2. Описание используемого метода интегрирования уравнений движения

В динамических расчетах усилия и перемещения полагаются функциями времени t . Запишем уравнение движения для системы с конечным числом степеней свободы в матричном виде [54, 66, 92]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t), \quad (2.7)$$

где $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ и $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ – векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений (точками обозначены производные по времени) соответственно;

\mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} – «глобальные» матрицы масс, демпфирования и жесткости для всего тела; поскольку в данной работе расчеты производятся в геометрически нелинейной постановке, то в матрице жесткости учитывается и так называемая геометрическая матрица жесткости [66];

$\mathbf{p}(t)$ – вектор эквивалентных узловых нагрузок для всего тела.

Для численного решения уравнения (2.7) в данной работе используется метод Гильбера-Хьюза-Тейлора (*Hilber-Hughes-Taylor*, *HHT- α* метод) [100], который является одной из обобщающих модификаций метода Ньюмарка [6], позволяющий ввести численное демпфирование, позволяющее снизить высокочастотный отклик конструкции, вызываемый в ряде случаев из-за использования приближенных вычислений.

Запишем выражения для вектора скоростей и перемещений на $n+1$ шаге в виде:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}_n + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]\Delta t, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n\Delta t + [(0.5-\alpha)\ddot{\mathbf{u}}_n + \alpha\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]\Delta t^2, \quad (2.9)$$

где α и δ – параметры, от которых зависит точность и устойчивость схемы [6].

В методе Ньюмарка после подстановки (2.8) и (2.9) уравнение (2.7) записывается относительно неизвестных ускорений на $n+1$ шаге, но в методе *HHT* используется следующее выражение:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{p}_{n+1-\alpha_f}, \quad (2.10)$$

где $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} = (1-\alpha_m)\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_m\ddot{\mathbf{u}}_n$;

$\dot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{u}}_n$;

$\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{u}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{u}_n$;

$\mathbf{p}_{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{p}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{p}_n$;

α_m и α_f – дополнительные параметры метода *HHT*.

Для того, чтобы схема имела второй порядок точности и была безусловно устойчивой коэффициенты α , δ , α_m и α_f должны назначаться по следующим формулам [100]:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0.25(1 + \gamma)^2; \\
\delta &= 0.5 + \gamma; \\
\alpha_f &= 0.5(1 - \gamma); \\
\alpha_m &= 0.5(1 - 3\gamma),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\gamma \geq 0$ – параметр численного демпфирования.

В данной работе обычно принималось значение $\gamma = 0.1$, соответственно по формуле (2.11) получаем величины остальных параметров:

$$\alpha = 0.3025; \delta = 0.6; \alpha_f = 0.45; \alpha_m = 0.35.$$

Перед решением уравнения (2.10) введем обозначение вектора невязки \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1-\alpha_f} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_f} - \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}, \tag{2.12}$$

В случае нелинейной задачи, уравнение (2.10) соответствует системе нелинейных алгебраических уравнений, если применить процедуру метода Ньютона-Рафсона получим линеаризованную форму уравнения:

$$\mathbf{R}_{n+1}^k + \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{0}, \tag{2.13}$$

где k – номер итерации метода Ньютона-Рафсона;

$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ – приращение перемещений на k -й итерации.

Опуская выкладки из уравнения (2.13) получим итоговую систему уравнений:

$$\left[\frac{1 - \alpha_m}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1 - \alpha_f}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} + (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_{n+1}^T \right] \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{R}_{n+1}^k, \tag{2.14}$$

где \mathbf{K}_{n+1}^T – касательная матрица жесткости определенная в момент времени t_{n+1} в зависимости от \mathbf{u}_{n+1}^k .

Решение задачи сводится к итерационному алгоритму, условием прекращения которого является достижение величины невязок заранее заданной малой величины.

2.2. Численное моделирование потока воздуха, обтекающего оболочку

Ветровые нагрузки на здания выражаются в виде неравномерного распределения дополнительного давления воздуха по поверхности сооружения, которое зависит от формы сооружения, скорости воздуха, окружающей застройки, рельефа и других параметров. Распределение ветровой нагрузки характеризуется безразмерным аэродинамическим коэффициентом давления C_p : [73]:

$$C_p = \frac{2(p - p_0)}{\rho V^2}, \quad (2.15)$$

где V – среднее значение скорости на свободном воздушном потоке;

$(p - p_0)$ – разница между местным давлением и давлением на значительном удалении от сооружения (атмосферным давлением);

ρ – плотность воздуха.

Поскольку натурные испытания реальных объектов чрезвычайно трудоемки и дороги, то для изучения картины обтекания зданий в потоке воздуха как правило проводят аэродинамический эксперимент – продувку масштабной модели здания в аэродинамической трубе. Безразмерная форма записи аэродинамического коэффициента давления C_p (2.15) удобна тем, что дает возможность переносить результаты модельных экспериментов на природу [73].

Однако, в силу ряда причин все условия подобия (геометрическое, кинематическое и динамическое) не могут соблюдаться, как правило речь идет о частичном подобии. Особенно остро эта проблема стоит с аэроупругими конструкциями, поскольку дополнительно требуется обеспечить подобие упругих свойств конструкции. Кроме того, для того, чтобы корректно переносить результаты аэродинамических продувок на реальные объекты, структура потока в аэродинамической трубе должна быть подобна пограничному слою атмосферы. Но реальная картина обтекания конкретного здания может существенно отличаться от результатов даже идеального эксперимента (с полным подобием) по продувке модели отдельного здания из-за влияния окружающих объектов. В связи с этим для

уникальных и ответственных сооружений производят продувку целых районов [14], например, всего комплекса зданий ММДЦ «Москва-Сити» (см. рисунок 2.8) [28].

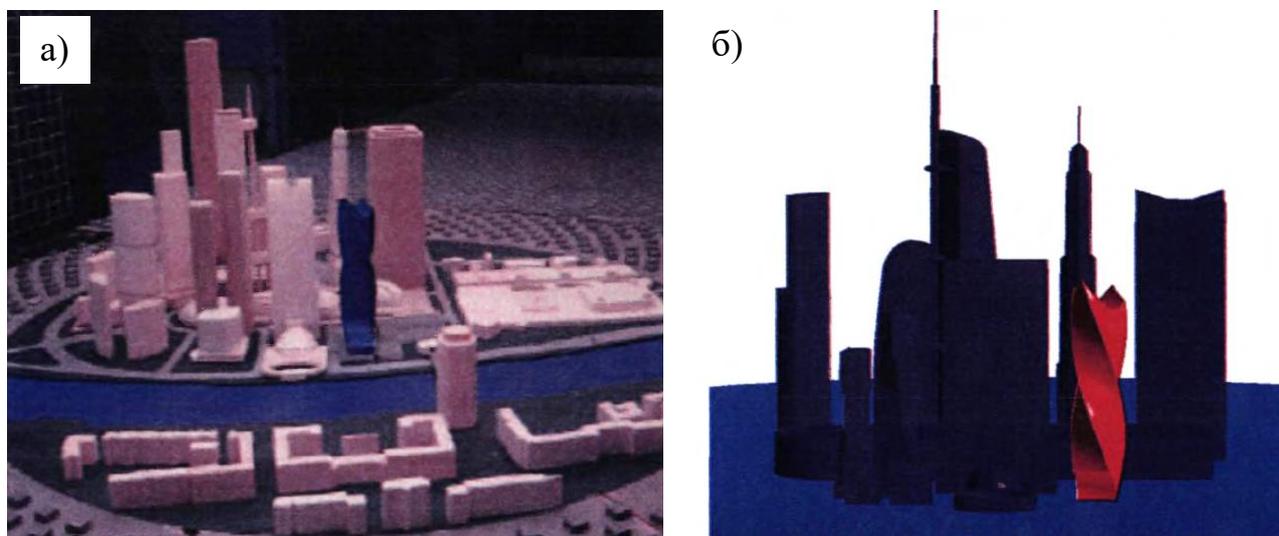


Рисунок 2.8 Аэродинамические модели для комплекса зданий ММДЦ «Москва-Сити»: а) экспериментальная (исследуемое здание показано синим цветом); б) численная (исследуемое здание показано красным цветом) [28]

С ростом и распространением высокопроизводительных вычислительных машин, связано и распространение численных методов аэродинамического моделирования. Сразу заметим, что на данном этапе развития вычислительной техники точное моделирование указанных явлений в силу ряда причин неосуществимо [17, 18], поэтому роль экспериментальных исследований и натуральных наблюдений не снижается, так как они требуются для верификации и подбора параметров численных моделей.

Численному моделированию обтекания зданий посвящены современные работы многих отечественных ученых: И.Н. Афанасьевой [5], А.М. Белостоцкого [9, 11], С.А. Вальгер [14], В.Г. Гагарина [17, 18], С.В. Гувернюка [24, 25], С.И. Дубинского [28], С.А. Исаева [8, 41], Е.Ю. Филатова [89, 90], Н.Н. Федоровой [87, 15] и других. Общим вопросам численного моделирования турбулентных течений посвящена книга [19]. За рубежом количество ученых, работающих в данной сфере исчисляется десятками, наиболее известными (из-за популярности предложенных

ими моделей турбулентности) являются F.R. Menter, Spalart P.R., Wilcox D.C. Намного более глубокий и детальный обзор литературы по данной теме можно найти в книге [9]. Как правило, перечисленные ученые используют сеточные (использующие связную сетку – конечный набор расчетных точек) численные методы и в первую очередь метод конечных (контрольных) объемов (МКО).

В последнее время развиваются, так называемые бессеточные методы. Краткий обзор основных бессеточных методов, а также ссылки на литературу по соответствующей теме, можно найти в §3.7 книги [9]. Использование данных методов имеет существенное преимущество в сокращении времени проведения расчета, поэтому их следует применять при многовариантных расчетах сложных течений. Например, в МГТУ им. Баумана разработан и продолжает развиваться программный комплекс, основанный на применении бессеточного метода вихревых элементов [59]. Он был успешно применен для моделирования аэроупругого взаимодействия ракеты, находящейся на стартовой площадке, с набегающим ветровым потоком [29]. В этой работе указано, что время выполнения расчетов существенно меньше, чем при использовании сеточных методов.

Отдельно стоит заметить, что проведение всё-таки физического, а не численного эксперимента, является необходимым для сооружений повышенного уровня ответственности согласно изменению №1 к последней редакции (2016 г.) свода правил [78]. При этом методика проведения аэродинамических испытаний приведена в приложения Ж и И в проекте Изменения №2 к своду правил [78].

2.2.1. Уравнения для описания модели течения

В данной работе для описания движения сплошной среды используется Эйлеров подход, при котором параметры состояния сплошной среды записываются для точек с координатами в неподвижной декартовой системе координат [9]. В данной работе для краткости вывод формул и уравнений как правило опущен,

однако, приводятся библиографические ссылки на работы, где можно найти соответствующие пояснения и комментарии.

Согласно [9] система уравнений для описания модели течения включает в себя:

1) уравнение состояния газа – в данной работе используется общеизвестное уравнение состояния идеального газа Менделеева-Клапейрона, которое подходит для описания поведения воздуха при давлении, близком к атмосферному при не высоких скоростях потоков;

2) законы сохранения массы, импульса (количества движения) и энергии;

3) начальные и граничные условия.

Уравнение состояния идеального газа приведем в следующем виде [102]:

$$\rho = \frac{P_{op} + p}{\frac{R}{M_w} T}, \quad (2.16)$$

где ρ – плотность воздуха;

p – давление;

R – универсальная газовая постоянная;

p_{op} – атмосферное давление, обычно принимаемое равным 101 300 Па;

M_w – молекулярная масса для воздуха, 29 г/моль;

T – температура, определяемая из уравнения закона сохранения энергии, которое позволяет учесть взаимосвязь скорости и температуры воздуха через баланс внутренней и кинетической энергии.

Далее запишем уравнение закона сохранения массы (уравнение неразрывности) в декартовой системе координат [14]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial \rho}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial \rho}{\partial z}(\rho \cdot w) = 0, \quad (2.17)$$

где u, v, w – компоненты вектора скорости V (по осям x, y, z декартовой системы координат соответственно);

t – время.

Данное уравнение справедливо и для тех случаев, когда рассматривается сжимаемая среда.

Как правило, математическое моделирование обтекания конструкций и зданий потоком воздуха сводится к решению на заданных граничных и начальных условиях трехмерных нестационарных нелинейных уравнений Навье-Стокса [9, 14], выражающих закон сохранения количества движения:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где F_x, F_y, F_z – проекции объемных сил;

τ – вязкие напряжения, определяемые по обобщенному закону Ньютона (закону Стокса) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где μ – коэффициент кинематический вязкости воздуха.

Вывод уравнений Навье-Стокса на основе Второго закона Ньютона для элементарного объема жидкости можно найти, например, в [90]. Турбулентные

течения, согласно современным представлениям, подчиняются классическим уравнениям Навье-Стокса [19], однако, сложность в том, что уравнения Навье-Стокса, в общем случае, не имеют аналитического решения, поэтому для их решения используются численные сеточные методы: метод конечных (контрольных) объемов, метод конечных элементов, метод конечных разностей и т.п. Но суммарные затраты на реализацию прямого численного интегрирования этих уравнений (*direct numerical simulation, DNS*) растут с ростом числа Рейнольдса как $Re^{11/4}$: даже для расчета обтекания типичного гражданского самолета потребуется сетка размерностью порядка 10^{16} [5], таким образом в настоящее время использование *DNS* осуществимо только для небольших объектов [9]. Например, с помощью этого метода в работе [63] исследуется обтекание полукруглого выступа высотой $h = 3$ мм в канале прямоугольного сечения размерами 20x50 мм воздухом со скоростью до 2.2 м/с, что соответствует $Re_h = 440$. В расчетах обтекания достаточно крупных объектов для моделирования турбулентных течений используются упрощенные подходы и модели (см. п. 2.2.3).

Последним уравнением сохранения является уравнение сохранения энергии [26, 102] (при отсутствии объемных источников тепла):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \nabla \cdot (\rho c_p T \mathbf{V}) = \nabla \cdot (KT), \quad (2.21)$$

где c_p – теплоемкость;

T – температура;

K – коэффициент теплопроводности.

2.2.2. Основная идея метода конечных (контрольных) объемов

Основной идеей метода конечных (контрольных) объемов (*finite volume method*) является разбиение области на совокупность отдельных ячеек, для каждой из которой записывается дискретный аналог законов сохранения (2.17), (2.18) и (2.21) на основе баланса всех потоков через границы рассматриваемого конечного

объема [88]. Таким образом система дифференциальных уравнений заменяется системой алгебраических относительно искомым величин (давлений, скоростей и т.д.), вычисляемых расчетных точках. При этом существует два подхода:

1) искомые величины вычисляются в центрах отдельных ячеек, которые и служат контрольными объемами (реализован в ANSYS Fluent [102]);

2) искомые величины вычисляются в «вершинах» (узлах) ячеек, а границы конечных объемов строятся через середины ребер ячеек, примыкающих к данному узлу (реализован в ANSYS CFX).

Первый подход дает лучшие результаты при использовании структурированных сеток из шестигранных ячеек, второй допускает более широкое использование тетраэдрических ячеек и подходит для зон с очень сложной геометрией. В данной работе использован первый подход, поскольку рассматривается обтекание только одного гладкого объекта (воздухоопорной оболочки), имеющей достаточно простую геометрию (по сравнению, например, с группой близко расположенных зданий).

Отличительной особенностью данного метода является применение законов сохранения на этапе построения численных схем, а выполнение этих законов соблюдается не для бесконечно малых объемов, как принималось при выводе дифференциальных уравнений сохранения, а в конечных объемах ячеек.

Решение системы алгебраических уравнений получают при задании соответствующих граничных и начальных условиях, которые определяют значения различных величин на границах расчетной области (например, нулевая скорость для граничного условия липкой стенки или нулевая нормальная компонента скорости для условий симметрии и т.д.). Рассмотрение всевозможных вариантов граничных условий выходит за рамки данного диссертационного исследования, но его можно найти в литературе [9, 88, 102].

Кроме граничных условий, необходимо также назначить положение границ, то есть размеры расчетной области таким образом, чтобы с одной стороны исключить влияние этих фиктивных границ на решение, а с другой

минимизировать размер расчетной области для размерности задачи и времени расчета. Как правило, при моделировании обтекания отдельно стоящего сооружения границы расчетной области отстоят от объекта с характерным размером D с наветренной стороны, сверху и с боков на $5D$, а с подветренной (заветренной) на расстоянии $15D$ для моделирования срывающихся вихрей.

2.2.3. Моделирование турбулентных потоков

Несмотря на то, что турбулентные потоки описываются уравнениями Навье-Стокса, как уже упоминалось, даже численное их решение представляется не возможным. В связи с этим, ученые искали и продолжают искать пути упрощения уравнений или использования приближенных методик, которые бы позволяли получать решение с приемлемой точностью и за достаточно небольшой промежуток времени, ориентируясь на мощности доступных вычислительных средств. В частности, существует взаимосвязь между допустимой размерностью задачи и размером оперативной памяти компьютера, между временем расчета и количеством центральных процессоров и т.д.

В данном разделе только в общих чертах опишем основные подходы к упрощенному моделированию турбулентности, поскольку данный вопрос является чрезвычайно сложным [8, 19].

Выделяют следующие основные классы подходов к моделированию турбулентности [5, 14, 28, 33, 19]:

- 1) Моделирование крупных вихрей (*Large Eddy Simulation, LES*);
- 2) Осредненные по Рейнольдсу [8] уравнение Навье-Стокса (*Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS*);
- 3) Гибридный подход – моделирование отсоединенных вихрей (*Detached Eddy Simulation, DES*).

Наименее требовательным к вычислительным к качеству сетки и вычислительным ресурсам является второй класс методов, а наиболее требовательным (из перечисленных) – первый.

Это связано с тем, что для первого класса методов требуется такая расчетная сетка, которая позволяла бы разрешить вихревые структуры, превышающие размер «фильтра», а для меньших структур использовать «подсеточные» модели турбулентности. Для второго класса методов вихревые структуры не разрешаются (требования к качеству расчетной сетки, соответственно, снижаются), а моделируются, поскольку при разложении скорости на осредненную и пульсационную составляющие, количество неизвестных возрастает, система уравнений Навье-Стокса становится незамкнутой, для ее замыкания используют дополнительные полуэмпирические соотношения, называемые моделями турбулентности. Заметим, что универсальной модели не существует, в связи с существенным различием эмпирических данных для различных режимов обтекания, на основе которых записываются дополнительные уравнения [19]. При этом модели также различаются и по количеству дополнительных уравнений. *RANS*-подход позволяет предсказать только одну, главную частоту срыва вихрей одного масштаба [88]. Третий класс методов занимает промежуточное положение – требуется такая сетка, чтобы разрешить только крупные, «отсоединенные» вихри в отрывных зонах, а для мелких (вблизи стенок) используются не подсеточные модели турбулентности, а *RANS*-подход.

В данной работе в основном используется самый «экономичный» называемый *URANS*-подход (*unsteady RANS*, нестационарный *RANS* подход), поскольку параметры течения меняются во времени, а при решении двусторонне связанных задач обтекания крупнобаритных объектов невозможно удовлетворить требованиям к качеству расчетной сетки для вихререзающих подходов и одновременно обеспечить проведение многовариантных расчетов за приемлемое время.

Остановимся на описании *RANS*-подхода более подробно.

К представлению неизвестных величин применяется подход Рейнольдса: любые мгновенные значения гидродинамических параметров потока представляются в виде суммы осредненной по времени величины и ее пульсационной составляющей. Как уже говорилось, система уравнений Навье-Стокса вместе с уравнением неразрывности и сохранения энергии перестает быть замкнутой. Простейший путь замыкания системы – использование эмпирической информации о характеристиках турбулентности, наиболее сложный заключается в выводе уравнений относительно рейнольдсовых напряжений [8].

Данная работа не ставит целью всеобъемлющее исследование возможных подходов к моделированию турбулентных течений, поэтому с учетом многовариантных численных расчетов ветровой нагрузки на здания, выполненных С.И. Дубинским [28] воспользуемся его рекомендациями по использованию двухпараметрической $k-\omega$ SST модели при использовании URANS подхода и гибридной DES-модели.

Приведем несколько комментариев, касающихся модели $k-\omega$ SST: «по совокупности своих качеств является одной из лучших, если не лучшей, среди существующих RANS моделей турбулентности» [19]. «Основываясь на том, что модели турбулентности типа $k-\varepsilon$ лучше описывают свойства свободных сдвиговых течений, а модели типа $k-\omega$ имеют преимущество при моделировании пристеночных течений, Ф.Р. Ментер предложил модель, сочетающую в себе указанные сильные стороны $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ -моделей. Для этого $k-\varepsilon$ -модель переформулировалась в терминах $k-\omega$, а затем в полученные в результате модельные уравнения введена эмпирическая функция, обеспечивающая плавный переход от $k-\omega$ -модели в пристеночной области к $k-\varepsilon$ -модели вдали от твердых стенок» [8]. Кроме того, данная модель позволяет наиболее аккуратно предсказывать отрыв. Кроме того, параметры модели подобраны таким образом, чтобы модель хорошо работала для пристенных отрывных течений [88].

Более полное описание полуэмпирических моделей турбулентности можно найти во многих книгах, например, [8, 9, 19, 88]. Для определения наиболее

подходящей модели было проведено сопоставление экспериментальных результатов исследования обтекания крупномасштабной модели сферической воздухоопорной оболочки с результатами тестовых расчетов (см. п. 4.1).

2.3. Методика решения связанных задач

В том случае, когда наблюдается взаимовлияние действующей нагрузки и напряженно-деформированного состояния конструкции говорят, что задача является связанной. Например, задачи термоупругости, в том случае, когда учитывается выделение тепла при деформировании конструкций, задачи аэроупругости, когда деформирование тела при обтекании потоком жидкости изменяет структуру потока и многие другие.

В четвертой главе диссертации рассматривается аэроупругое взаимодействие воздухоопорных оболочек с окружающей средой – потоком воздуха. Можно выделить два типа расчетов взаимодействия деформируемого тела со средой (жидкостью или газом):

1) Односторонний расчет (*1-way FSI*) – производится расчет обтекания абсолютно жесткого тела потоком жидкости или газа, а затем полученное на поверхности тела поле давлений прикладывается в виде внешней нагрузки, на действие которой тело рассчитывается как деформируемое (рисунок 2.9, а).

2) Двусторонне-связанный (сопряженный) расчет (*2-way FSI*) – представляет собой итерационную процедуру, когда на каждой итерации последовательно выполняются два расчета – динамический (механический) расчет упругой конструкции и аэродинамический расчет окружающей среды – с обменом результатами этих расчетов (рисунок 2.9, б). Результаты динамического расчета передаются в виде перемещений узлов расчетной сетки, после чего производится решение задачи аэродинамики для модели с измененной геометрией. Результаты этого расчета в виде поля давлений прикладываются к конструкции в виде нагрузок

и производится новый динамический расчет с учетом этих дополнительных нагрузок, в результате которого уточняются значения перемещений узлов сетки. После этого опять выполняется уточнение поля давлений по результатам аэродинамического расчета и так далее пока относительные невязки решений не достигнут заранее заданной точности (в нашем случае 0.01). Итерации выполняются с малым шагом по времени (подбираемым для каждой задачи индивидуально), так чтобы приращения давлений и перемещений точек тела были достаточно малы. Иначе может возникнуть ситуация, когда при перестроении сетки возникнут ячейки с отрицательным объемом, что, как правило, приводит к остановке расчета.

Прямое моделирование воздуха конечными элементами типа «жидкость» (т.н. «моноконтинуальный» подход) в данной работе не рассматривается.

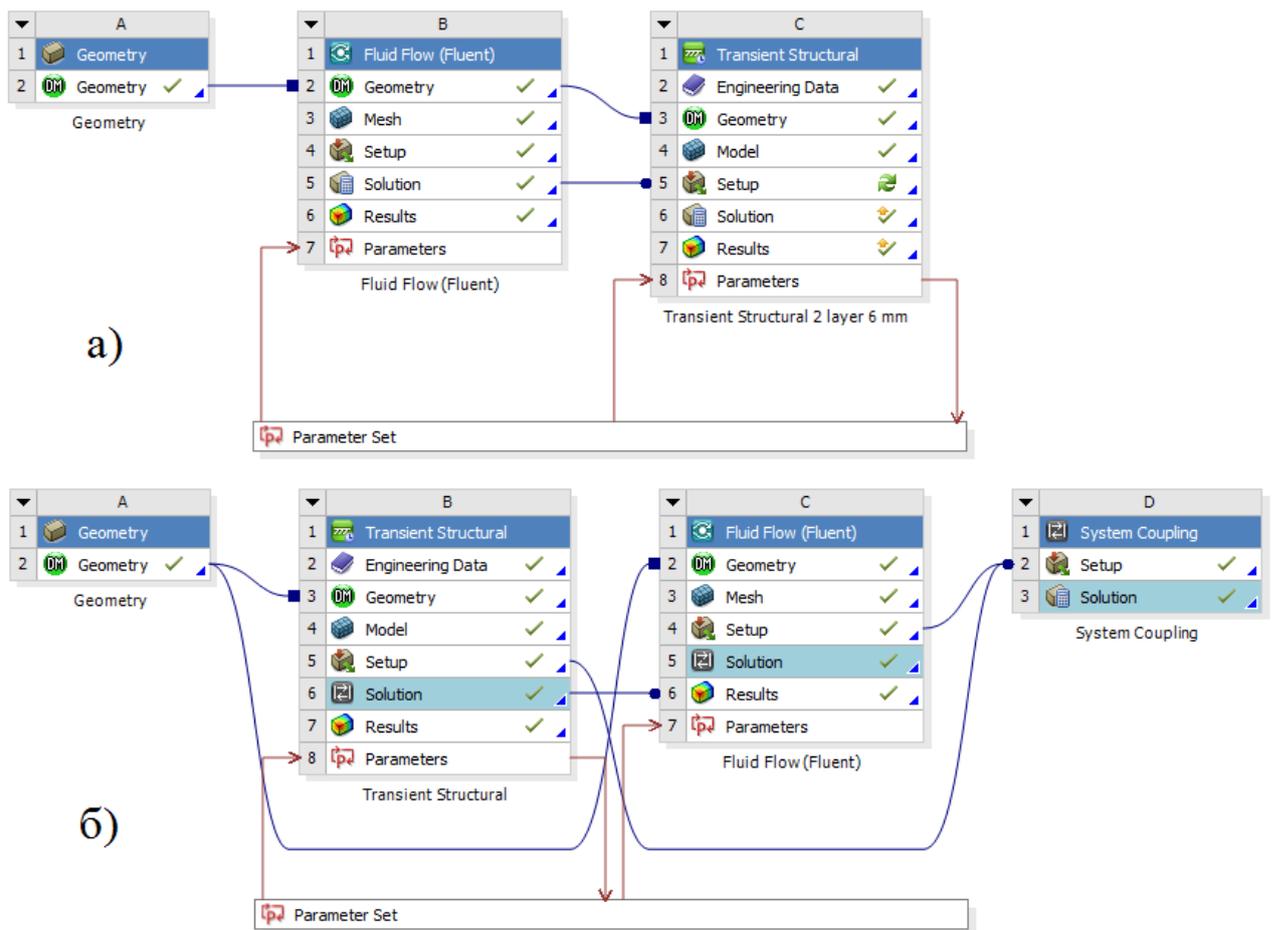


Рисунок 2.9 Схема проекта ANSYS Workbench в случае: а) односторонне-связанного расчета; б) двусторонне-связанного (сопряженного) расчета

Для автоматизации сопряженных расчетов применяются специальные программные комплексы (*ANSYS*, *Abaqus*, *STAR-CCM+* и др.). В программном комплексе *ANSYS* имеются инструменты для решения всех поставленных задач: для решения задач строительной механики – модуль *ANSYS Mechanical*, задач гидрогазодинамики – модули *ANSYS Fluent*, *CFX* и др., а также средство для обмена результатами при проведении связанных расчетов – *System Coupling* [115]. Таким образом, полный двусторонний связанный расчет можно произвести в рамках одного программного комплекса, что достаточно просто осуществить с помощью платформы *ANSYS Workbench*, которая и была использована в данной работе.

Для корректного обмена данными, на двух расчетных областях должны быть назначены совпадающие интерфейсные поверхности. Передача данных производится после автоматической интерполяции, узлы расчетных сеток на интерфейсных поверхностях не обязаны совпадать, что позволяет использовать различную дискретизацию интерфейсных поверхностей.

Однако, при решении задачи взаимодействия именно воздухоопорных оболочек с потоком воздуха возникают определенные сложности при использовании гипотезы о постоянстве плотности воздуха. Эта гипотеза при скоростях воздуха меньших 30% скорости звука в воздухе дает погрешность около 2.3% [27], а ее введение позволяет исключить из рассмотрения дополнительные уравнения закона сохранения энергии. Постоянство плотности воздуха, то есть его несжимаемость, является препятствием при проведении двусторонне связанного расчета, поскольку на начальном этапе объем, занимаемый воздухоопорной оболочкой и подоболочечным пространством должен увеличиваться под действием внутреннего избыточного давления, а размер расчетной области для окружающего сооружения воздуха должен уменьшиться. При использовании модели несжимаемой жидкости для воздуха это приводит к лавинообразному росту давления со стороны окружающего воздуха на оболочку. Использование модели идеального газа для воздуха, учитывающей сжимаемость, решило эту проблему, а

изменение плотности воздуха в расчетной области в результате расчетов не превысило 1%.

Для проведения одностороннего расчета не требуется использование надстройки *System Coupling*, импорт нагрузки можно выполнять внутри модуля *ANSYS Mechanical*.

В качестве примера приведем использование программного комплекса *ANSYS* применительно к численному моделированию мягких оболочек мобильных водонаполняемых дамб в работе [83]: сравнительный анализ с экспериментальным исследованием реальных моделей мобильных водонаполняемых дамб показал расхождение результатов менее 22% для однокамерных и 20% для двухкамерных конструкций. Результаты численного моделирования использовались и для проверки нового технического решения, разработанного автором работы [83].

Кроме того, использование программного комплекса *ANSYS* применительно к численному моделированию воздухоопорных оболочек можно найти в работе [144].

2.4. Выводы по главе 2

В данной главе приведены основные положения метода конечных элементов, используемого в диссертационной работе для численного моделирования воздухоопорных оболочек.

Обосновано применение линейно-упругой ортотропной модели материала воздухоопорной оболочки.

Обосновано использование модели идеального газа для окружающего оболочку воздуха. Приведены сведения по моделированию турбулентных течений.

Разработана и описана методика расчета воздухоопорных оболочек в геометрически нелинейной постановке с использованием метода конечных элементов и метода конечных объемов в двусторонне связанной постановке.

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

3.1. Деформирование изотропной оболочки под действием избыточного давления

3.1.1. Постановка задачи и особенности проведения расчета

Избыточное давление воздуха, создающее предварительное натяжение оболочки, является наиболее характерной, постоянной, а иногда и единственной нагрузкой для воздухоопорных зданий. Поэтому корректная оценка влияния избыточного давления на воздухоопорную оболочку является необходимым условием для проведения дальнейших более сложных расчетов.

Выделим ключевые особенности проведенных расчетов:

- материал оболочки изотропный линейно упругий;
- геометрически нелинейная постановка задачи – уравнения равновесия составляются и решаются для деформированной конфигурации оболочки;
- пренебрежение изгибной жесткостью оболочки, т.е. в оболочке возникают только мембранные усилия.

Достоверность полученных результатов подтверждается:

- сравнением численных решений, полученных с помощью МКЭ в двух независимых расчетных комплексах – Лира САПР и ANSYS;
- анализом сходимости численных решений при различной густоте конечно-элементной сетки, а также при расчете с учетом симметрии задачи;
- сопоставлением полученных результатов с данными из литературных источников и расчетом по нормативной методике [76].

Были рассмотрены оболочки следующих типов:

- Тип 1. Полуцилиндрическая со сферическими торцами;

- Тип 2. Полусферическая;
- Тип 3. Оболочка на прямоугольном плане размером 20x40 м.

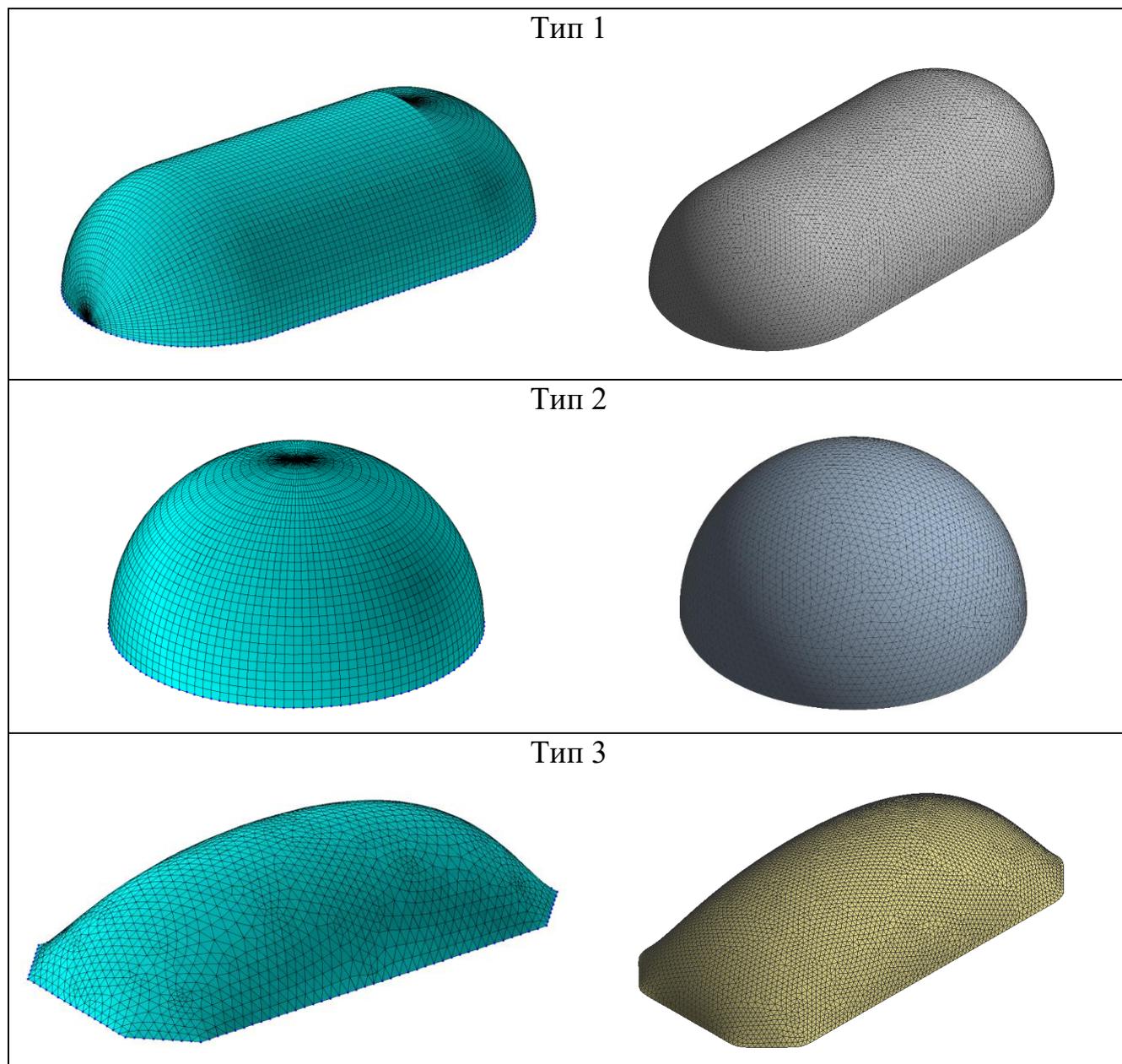


Рисунок 3.1 Расчетные модели оболочек типов 1-3 (сверху вниз). Модели ВК Лира САПР показаны слева, модели для ВК ANSYS справа ($d = 0.5$ м).

Процесс наддува оболочки не рассматривается в данной работе, задача рассмотрена в статической геометрически нелинейной постановке.

Для оболочки типа 1 параметры НДС, полученные методом конечных разностей, приведены в статье В.И. Усюкина, опубликованной в [33, с. 299-333]. Для вычисления напряжений в оболочках типа 1 и 2 применимы формулы

действующего нормативного документа по проектированию и расчету воздухоопорных сооружений [76]. Однако, следует заметить, что оболочки типа 1 практически не возводятся в настоящее время в связи со сложностью раскроя и неудобством сферических торцов. Им на смену пришли оболочки типа 3, форма которых определяется численно из условия равнонапряженности при действии избыточного давления (подробнее см. п. 1.2.3). Геометрическая модель оболочки типа 3 была предоставлена В.В. Ермоловым (ООО ПСБ «Вертеко»).

Радиус цилиндрической части и сферических торцов оболочки типа 1, а также радиус оболочки типа 2 принимался равным $R = 10$ м, длина цилиндрического участка оболочки типа 1 составляла 20 м, что соответствует полной длине оболочки 40 м.

Размеры в плане и высота в центральной точке оболочки типа 3 составляют 20x40 м и 8.6 м, что соответствует радиусу кривизны в поперечном сечении около 10 м. Геометрическая модель оболочки типа 3 была получена преобразованием сеточной модели в гладкую поверхность с помощью компонента *Finite Element Modeler*, входящего в программный комплекс *ANSYS*. Геометрические модели для оболочек типа 1 и 2 были построены в модуле *DesignModeler*.

Толщина оболочки принималась во всех случаях равной 1 мм, физико-механические параметры материала и нагрузка приняты в соответствии с вышеупомянутой статьей [33]: модуль упругости $E = 200$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0$. Величина избыточного давления $p = 500$ Па = 0.5 кН/м².

Для моделирования безмоментной работы оболочки в ВК Лира САПР использовались треугольные и четырехугольные КЭ типа 341-344 с включенной опцией «Мембрана», в ВК *ANSYS Workbench* для треугольных оболочечных элементов типа *Shell181* была активирована опция *KEYOPT(1) = 1*, позволяющая игнорировать моментные усилия, возникающие в элементах. Расчеты были произведены для сеток различной размерности, для самых подробных сеток максимальный размер ребра конечного элемента d был принят равным 0.5 м.

В качестве граничных условий принимался запрет поступательных перемещений узлов нижней кромки оболочки.

3.1.2. Определение максимальных напряжений по безмоментной теории

Расчет наибольших погонных мембранных усилий (натяжений) от действия внутреннего давления по действующим нормам [76] производится на основе безмоментной теории оболочек [32], без учета геометрической нелинейности.

Для сопоставления результатов с численными расчетами необходимо погонные мембранные усилия перевести в напряжения. Отметим, что при толщине оболочки $h = 1 \text{ мм} = 0.001 \text{ м}$ единичному погонному растягивающему усилию $N_{1,2} = 1 \text{ кН/м}$ соответствует напряжение:

$$\sigma_{1,2} = \frac{T_{1,2}}{h} = \frac{1}{0.001} = 1000 \text{ кН/м}^2 = 1 \text{ МПа} \quad (3.1)$$

Для цилиндрического участка оболочки типа 1 воспользуемся формулами (4) и (5) [76]:

$$T_1 = pR = 0.5 \cdot 10 = 5.00 \text{ кН/м} - \text{усилие в меридиональном направлении};$$

$T_2 = 0.5pR = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 10 = 2.50 \text{ кН/м} - \text{усилие в кольцевом (окружном) направлении.}$

Соответствующие напряжения (с учетом (3.1)):

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{h} = \frac{5}{0.001} = 5000 \text{ кН/м}^2 = 5 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = \frac{T_2}{h} = \frac{2.5}{0.001} = 2500 \text{ кН/м}^2 = 2.5 \text{ МПа}.$$

Для оболочки типа 2 усилия можно определить по формулам (2) и (3) [76]:

$$T_1 = T_2 = 0.5pR = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 10 = 2.50 \text{ кН/м}; \text{ соответственно, } \sigma_{1,2} = 2.5 \text{ МПа}.$$

3.1.3. Анализ и сопоставление результатов

Результаты расчета в статье В.И. Усюкина приведены в безразмерной форме, для их сопоставления с полученными в этой работе данными был произведен пересчет в соответствии с принятыми размерами оболочек и характеристиками материала. Данные результаты занесены в таблицу 3.1.

Результаты расчетов по нормативной методике (п. 3.1.2) приведены в таблице 3.1, там же показаны результаты расчетов напряжений в программных комплексах *ANSYS Workbench* и Лира САПР.

Таблица 3.1

Тип оболочки	1	2	3
Максимальное вертикальное перемещение, мм			
По данным [33]	400.0	-	-
<i>ANSYS Workbench</i>	407.4	139.6	399.0
Лира САПР	404.0	139.0	401.0
$\Delta_{max}, \%$	1.9	0.4	0.5
Меридиональные усилия T_1 , кН/м (или нормальные напряжения σ_1 , МПа)			
По данным [33]	5.31	-	-
<i>ANSYS Workbench</i>	5.37	2.51	5.47
Лира САПР	5.36	2.53	5.37
Расчет по [76]	5.00	2.50	-
$\Delta_{max}, \%$	1.1	0.8	1.9
Кольцевые усилия T_2 , кН/м (или нормальные напряжения σ_2 , МПа)			
По данным [33]	2.54	-	-
<i>ANSYS Workbench</i>	2.61	2.55	4.47
Лира САПР	2.57	2.51	4.43
Расчет по [76]	2.50	2.50	-
$\Delta_{max}, \%$	2.8	1.6	0.9

Согласно п. 3.2 [76], деформации оболочек не проверяются, однако, прогибы оболочки были определены в источнике [33], поэтому мы можем использовать картину распределения и максимальные значения вертикальных перемещений для оценки близости результатов. Изополю вертикальных перемещений полученные в ВК Лира САПР показаны на рисунке 3.2 слева, а в ВК ANSYS Workbench – справа.

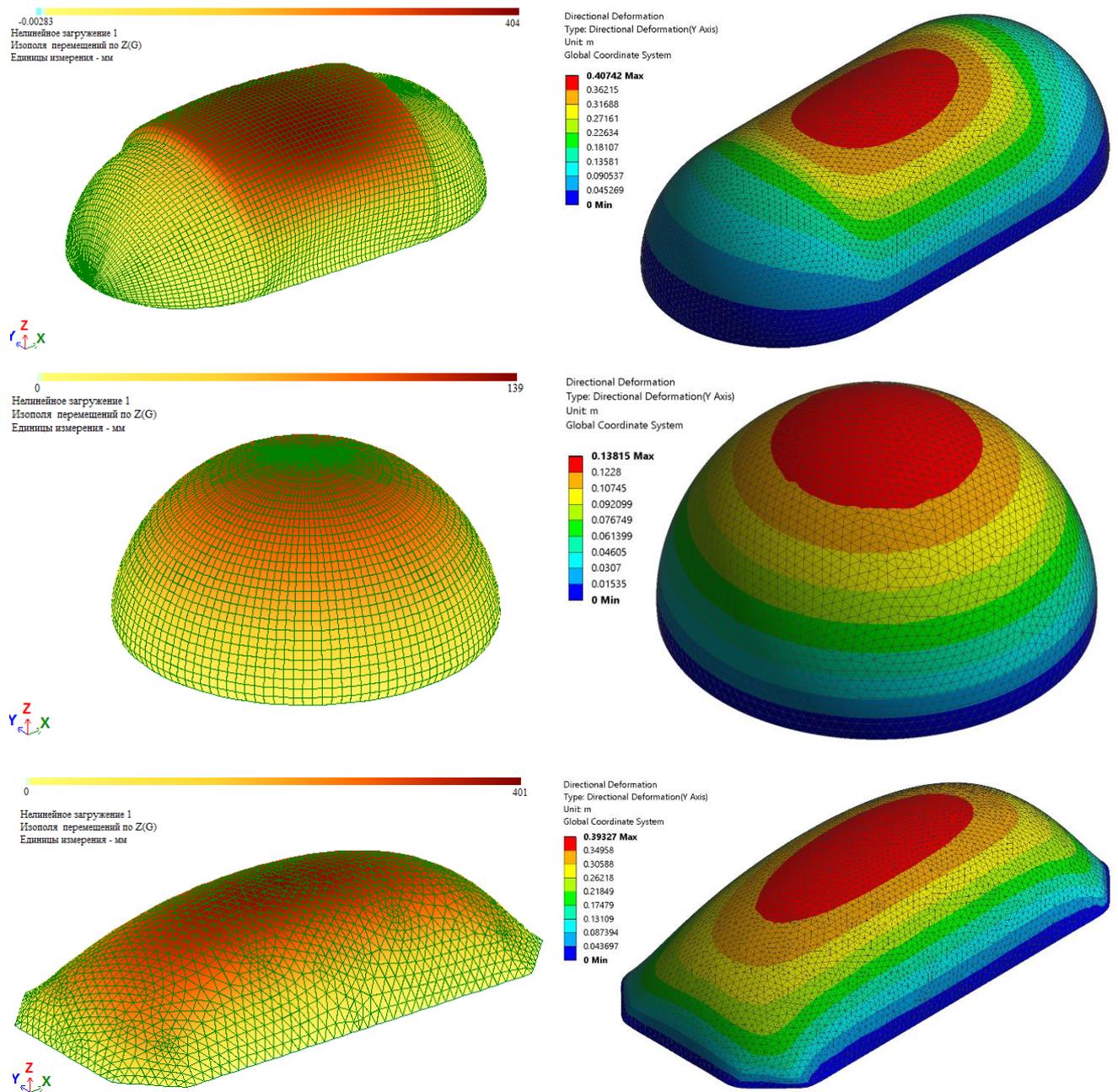


Рисунок 3.2 Изополю вертикальных перемещений

Анализ и сопоставление результатов выявили хорошее качественное и количественное соответствие (расхождения в пределах 7%) всех полученных

результатов, следовательно, можно сделать вывод о корректности принятого подхода к моделированию воздухоопорной оболочки. Расхождение между результатами расчета по нормативной методике (3.1.2) и результатами полученными численными методами (МКР и МКЭ) объясняется упрощенным подходом нормативной методики расчета, неучетом геометрической нелинейности, а также приближенным описанием гладкой формы оболочки в численных расчетах с использованием плоских конечных элементов.

Заметим, что в вычислительном комплексе Лира САПР 2013 отсутствует возможность назначения мембранным элементам ортотропных механических свойств, поэтому от дальнейшего применения указанного программного комплекса в данной работе было решено отказаться.

3.2. Анализ собственных частот и форм колебаний мягкой ортотропной цилиндрической оболочки, находящейся под действием избыточного давления

3.2.1. Введение

Исследованиям колебаний оболочек посвящено множество как классических [21, 80, 16], так и современных работ [11, 48, 143, 111]. Некоторые вопросы колебаний гибких ортотропных оболочек канонической формы описаны в главе III книги [4]. Изучению собственных колебаний гибких ортотропных цилиндрических оболочек посвящена работа [22]. Собственные частоты и формы колебаний изотропных цилиндрических мягких оболочек рассмотрены в статье [40]. Для изотропных прямоугольных мембран учет натяжения на частоты собственных колебаний можно найти в книге [80]. В статье [143] проводится экспериментальное исследование собственных частот и форм колебаний тороидальной пневматической оболочки, изготовленной из изотропного материала, а также

проводятся сопоставительные численные расчеты с помощью МКЭ. Монография [21] является фундаментальным трудом, посвященным общим вопросам анализа собственных колебаний оболочек с помощью операторных методов.

Следует отметить, что аналитические решения удается получить только для оболочек и мембран простой («канонической») формы.

В статье [103] изучаются частоты и формы собственных колебаний пневмобалки (мягкой круговой цилиндрической оболочки, предварительно напряженной за счет избыточного давления) с помощью метода динамической жесткости (*dynamic stiffness method*), разработанного в [149]. Для моделирования всей пневмобалки применяется стержневая модель типа Тимошенко (т.е. учитывающая деформации поперечного сдвига), что позволило получить аналитическое решение задачи. Такая модель пневмобалки позволила учесть ортотропные физико-механические свойства материала и нелинейные эффекты, вызванные «следящей» нагрузкой от внутреннего давления [103]. Точная матрица динамической жесткости пневмобалки была получена путем линеаризации нелинейных уравнений около предварительно напряженного состояния. На основе проведенного обзора литературы автор статьи [103] указывает, что аналитические выражения для определения собственных частот колебаний для пневмобалки из ортотропного материала при различных граничных условиях получены им впервые. Результаты для стержневой модели были сопоставлены с результатами других авторов [149], где получено решение только для шарнирно опертой пневмобалки из изотропного материала, а также с результатами, полученными методом конечных элементов в ПК *Abaqus* для пространственной оболочечной модели.

К особенностям задачи можно отнести следующие:

1) материал оболочки (техническая ткань с покрытием) является ортотропным;

2) оболочка является мягкой (мембраной) – не сопротивляется изгибу и сжатию, то есть работает только на растяжение;

3) избыточное давление воздуха придает оболочке дополнительную жесткость, которую необходимо учитывать при расчетах.

3.2.2. Определение частот и форм собственных колебаний для системы с конечным числом степеней свободы

Как уже упоминалось, главный принцип, на котором основан метод конечных элементов – это рассмотрение реальной конструкции в виде системы с конечным числом степеней свободы.

Модальный анализ проводится для определения частот и форм (мод) собственных колебаний конструкций в предположении, что система является линейной. Внешние силы и демпфирование полагаются равными нулю. В этом случае уравнение колебаний конструкции в матричной форме (2.7) принимает вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

Модальный анализ заключается в нахождении условий, при которых система совершает гармонические колебания по закону [66]:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Psi} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.3)$$

где $\mathbf{\Psi}$ – вектор, характеризующий форму собственных колебаний (соотношения между смещениями узлов);

ω – круговая частота собственных колебаний;

φ_0 – начальная фаза.

Подстановка (3.3) в (3.2) дает уравнение для собственных колебаний:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)\mathbf{\Psi} = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Тривиальным решением уравнения является нулевое смещение узлов (система остается неподвижной). Нетривиальное решение уравнения (3.4) существует лишь тогда, когда величины $\omega_i (i=1, \dots, n)$, обращают в нуль детерминант матрицы $(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)$. Соответствующие им формы собственных колебаний $\mathbf{\Psi}$ вычисляются лишь с точностью до произвольного множителя, значение которого определяется

избранным способом нормировки собственных форм [66]. Таким образом, амплитуды собственных колебаний не определены, из решения уравнения (3.4) могут быть получены только соотношения между перемещениями различных точек системы. Отметим, что число собственных форм совпадает с числом степеней свободы динамической системы n .

Наряду с круговой собственной частотой ω_i также вводится собственная частота f_i , представляющая собой число колебаний по i -той собственной форме, совершаемых системой за единицу времени (1 с):

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (3.5)$$

В качестве основного инструмента для проведения расчетов выбран программный комплекс (ПК) *ANSYS Mechanical*, в котором реализована возможность учета предварительного напряжения конструкции при проведении модального анализа, а также возможность использования мембранных конечных элементов из ортотропного материала [103].

3.2.3. Особенности модального анализа предварительно напряженной системы

Собственные частоты и формы колебаний предварительно напряженной системы отличаются от собственных частот и форм колебаний ненапряженной системы, при этом, для систем, работающих преимущественно на растяжение, частоты растут с увеличением величины предварительного напряжения [80, 54, 66]. Этот эффект используется, например, при натяжении струн в музыкальных инструментах. Следовательно, для корректной оценки собственных частот и форм колебаний воздухоопорной оболочки необходимо учесть не только начальную жесткость системы, но и дополнительную, вызванную эффектом предварительного напряжения за счет внутреннего давления воздуха под оболочкой.

Как указано выше, модальный анализ системы имеет смысл только в линейной постановке, в нелинейных же задачах можно говорить о разложении движения системы по формам свободных колебаний в окрестности изучаемого равновесного ее положения при линеаризации поведения системы в этой окрестности. Итак, определение напряженно-деформированного состояния (НДС) системы при статическом ее нагружении должно выполняться с учетом геометрически нелинейных эффектов (расчет по деформированной схеме, учитывающий следящий характер нагрузки от давления воздуха [103, 127]). Далее, зная НДС конструкции от действующих статических нагрузок, необходимо построить динамическую модель так называемой линеаризованной системы, под которой понимается исходная система, в которой все составляющие ее элементы рассматриваются в линейной постановке, но с касательными (мгновенными) матрицами жесткости [66].

Для этого в уравнении (3.4) вместо обычной матрицы жесткости \mathbf{K}_0 вводится касательная (мгновенная) матрица жесткости \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ – так называемая матрица геометрической жесткости:

здесь \mathbf{K}_1 – матрица начальных напряжений;

\mathbf{K}_2 – матрица начальных поворотов.

Детальное построение матрицы геометрической жесткости \mathbf{K}_G , а также матриц \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 подробно описано в книге [66, с.138-140].

3.2.4. Описание расчетных моделей

Объектом исследования выбрана пневмобалка – цилиндрическая оболочка диаметром 0.28 м, длиной 3 м и толщиной 1 мм. В работе [103] результаты расчетов по разработанной стержневой модели сопоставлены с результатами расчета конечно-элементной оболочечной модели, рассчитанной в ПК *Abaqus*. Следует

отметить, что в оболочечной модели присутствуют торцы, наличие которых приводит к дополнительному продольному растяжению оболочки под действием избыточного давления. В работе [103] не указано, учитывается ли это растяжение в стержневой модели.

В данной работе были выполнены расчеты для оболочечной модели пневмобалки как с торцами, так и без них. Для лучшей сходимости решения форма торцов была принята в виде полусфер, расстояние между центрами которых составляло длину пневмобалки, т.е. 3 м. Закрепления накладывались на крайние кольцевые сечения в цилиндрической части пневмобалки.

Трехмерная конечно-элементная (КЭ) модель пневмобалки создавалась в ПК *ANSYS Mechanical* с использованием трехузлового оболочечного конечного элемента типа *SHELL181*, реализующего теорию оболочек Миндлина-Рейсснера, в общем случае с шестью степенями свободы в каждом узле. Для решения данной задачи была включена мембранная опция (параметр *KEYOPT(1)=1*), которая позволяет не учитывать изгибную жесткость и игнорировать угловые степени свободы в узлах элементов [103].

Для исследования сеточной сходимости рассмотрены три варианта расчетной сетки с максимальной длиной ребра КЭ d равной 0.06, 0.03 и 0.015 м. Результаты расчета для двух последних случаев практически совпадают и приведены ниже.

Было рассмотрено 2 варианта закреплений концов пневмобалки:

- 1) защемленный левый край и свободный от закреплений правый край (консольная балка);
- 2) защемлённый левый край и шарнирно-опертый правый край.

3.2.5. Параметры расчетов

Рассмотрены пневмобалки, выполненные из двух различных ортотропных материалов – типа 1 и типа 2, с отличающимися характеристиками: в материале

типа 1 продольному направлению (E_1) соответствовал меньший модуль упругости, а в материале типа 2 – больший. Физико-механические характеристики для обоих материалов показаны в таблице 3.2 и приняты в соответствии с данными из источника [103].

Таблица 3.2.

Характеристика	Тип 1	Тип 2
Плотность ρ , кг/м ³	1420	1420
Модуль упругости в продольном (осевом) направлении E_1 , МПа	393.13	18370.0
Модуль упругости в кольцевом направлении E_2 , МПа	451.59	14120.0
Модуль сдвига G_{12} , МПа	103.0	6460.0
Коэффициент Пуассона ν_{12}	0.07	0.28
Коэффициент Пуассона ν_{21}	0.08	0.22

Для проведения модального анализа в ПК *ANSYS Mechanical* использовался блочный метод Ланцоша. Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) выполнялось разреженным методом (решатель *Distributed Sparse Matrix Solver*).

3.2.6. Результаты решения тестовой задачи

Результаты решения тестовой задачи представлены в следующем виде: на рисунках 3.3 и 3.4 показаны формы колебаний для пневмобалок из материала типа 1 при различных граничных условиях, а в таблице 3.3 приведены собственные частоты для всех рассмотренных случаев в сопоставлении с результатами эталонного исследования [103].

Относительные погрешности ε вычислены по формуле:

$$\varepsilon = \frac{|f_0 - f|}{f_0} \cdot 100\%, \quad (3.7)$$

где f_0 – эталонные результаты [103];

f – результаты расчетов, выполненных диссертантом.

Таблица 3.3.

Номер изгибной формы колебаний	Собственная частота f_i , Гц							$\varepsilon_{\min}/\varepsilon_{\max}$, %
	<i>ANSYS Mechanical</i>				Источник [103]		Стержневая модель	
	С торцами		Без торцов		<i>Abaqus</i>			
	$d = 0.03$ м, 7708 КЭ	$d = 0.015$ м, 30560 КЭ	$d = 0.03$ м, 7046 КЭ	$d = 0.015$ м, 27888 КЭ	$d = 0.03$ м, 2862 КЭ			
1.1 Консоль, материал типа 1								
1	2.90	2.90	3.09	3.09	3.00	3.14	1.5/7.7	
2	16.41	16.42	16.52	16.51	16.38	16.41	0.0/0.8	
1.2 Консоль, материал типа 2								
1	19.82	19.85	21.73	21.77	20.28	22.13	1.6/10.4	
2	114.84	115.05	124.46	124.73	117.69	118.47	2.2/6.0	
2.1 Жесткое закрепление с одной стороны и шарнирная опора с другой, материал типа 1								
1	12.73	12.75	11.28	11.25	12.85	11.89	0.8/12.5	
2	36.12	36.14	34.52	34.45	35.76	31.61	1.0/14.3	
2.2 Жесткое закрепление с одной стороны и шарнирная опора с другой, материал типа 2								
1	89.12	89.32	88.96	89.17	87.70	85.59	1.4/4.4	
2	259.62	259.94	258.83	260.12	255.70	231.89	1.2/12.2	

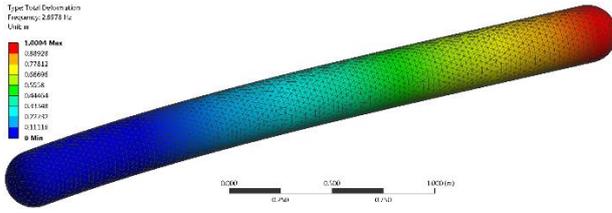
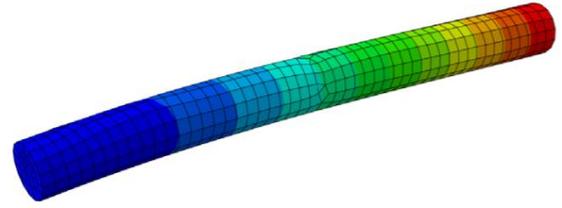
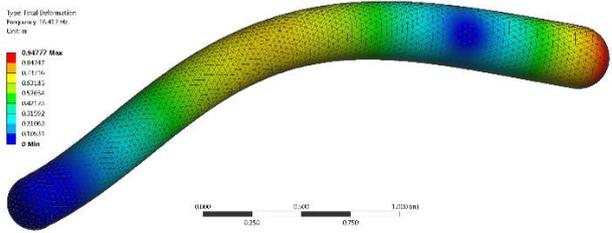
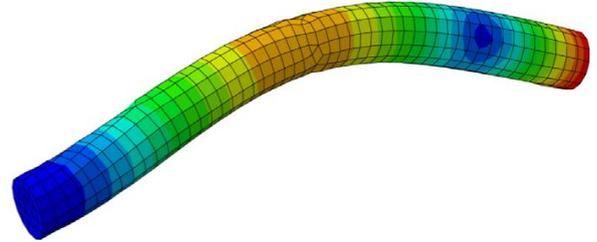
а) $f_1 = 2.898$ Гцб) $f_1 = 3.00$ Гц [103]в) $f_3 = 16.412$ Гцг) $f_2 = 16.38$ Гц [103]

Рисунок 3.3 Первая (а, б) и вторая (в, г) изгибные собственные формы и частоты колебаний консольной пневмобалки: а), в) – полученные в данной работе ($d = 0.03$ м); б), г) – данные источника [103].

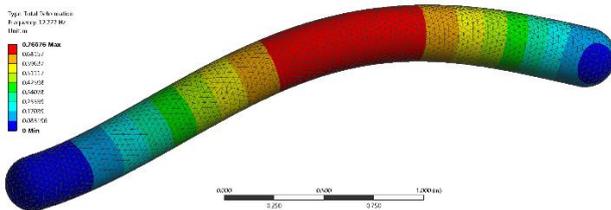
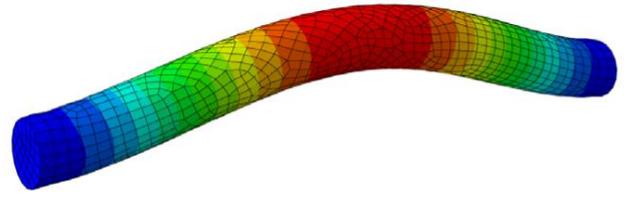
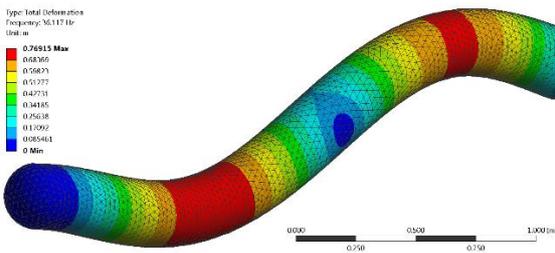
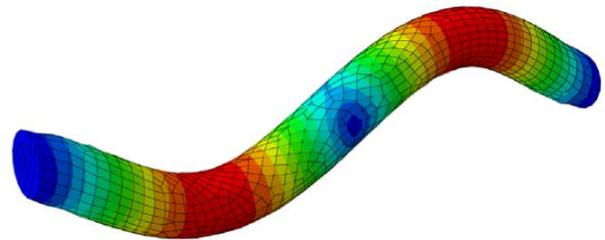
а) $f_1 = 12.727$ Гцб) $f_1 = 12.85$ Гцв) $f_3 = 36.117$ Гцг) $f_2 = 35.76$ Гц

Рисунок 3.4 Первая (а, б) и вторая (в, г) изгибные собственные формы и частоты колебаний пневмобалки, жестко закрепленной слева и шарнирно опертой справа: а), в) – полученные в данной работе ($d = 0.03$ м); б), г) – данные источника [103].

Поскольку в работе [103] имеется по два эталонных результата (для аналитической стержневой и численной оболочечной моделей), а в данной работе выполнены расчеты для пневмобалок с торцами и без, то для относительной погрешности (невязки) результатов в таблице 1 приведены максимальное ε_{\max} и минимальное ε_{\min} значения. Для результатов, полученных в данной работе, достигнута сеточная сходимость, поскольку собственные частоты при сгущении расчетной сетки с 0.03 м до 0.015 м изменяются не более чем на 0.05-0.5%. Расхождение между результатами диссертанта и эталонными результатами для стержневой модели [103] достигает 14.3%, а для конечно-элементной модели относительная погрешность не превышает 1% (случай 2.1 с торцами). Такая разница в результатах может объясняться различием в моделировании торцевых зон и граничных условий, а также особенностями построения стержневой аналитической модели (например, принималась гипотеза, что сечение пневмобалки остается круглым и после деформации [103], однако, в оболочечных моделях это условие не всегда выполняется, см. рисунок 3.5, а).

Кроме того, следует отметить, что из одномерной стержневой модели могут быть получены только изгибные формы колебаний, а в трехмерных конечно-элементных моделях можно наблюдать оболочечные формы колебаний, обусловленные волнообразованием в кольцевом направлении. Поэтому, как правило, второй изгибной форме колебаний соответствует гораздо больший номер собственной формы. В частности, на рисунке 3.5,а показана 24-я собственная форма для случая 2.2 (с торцами), а рисунке 3.5,б на изображена 13-я оболочечная форма колебаний, частота которой ($f_{13} = 223.06$ Гц), ниже, чем у второй изгибной формы колебаний ($f_{24} = 259.62$ Гц). На ней можно выделить одну полуволну в продольном направлении и восемь полуволн в кольцевом.

С учетом сделанных замечаний можно считать тестовую задачу успешно решенной, что позволяет использовать примененный подход для анализа собственных частот и форм колебаний воздухоопорной оболочки.

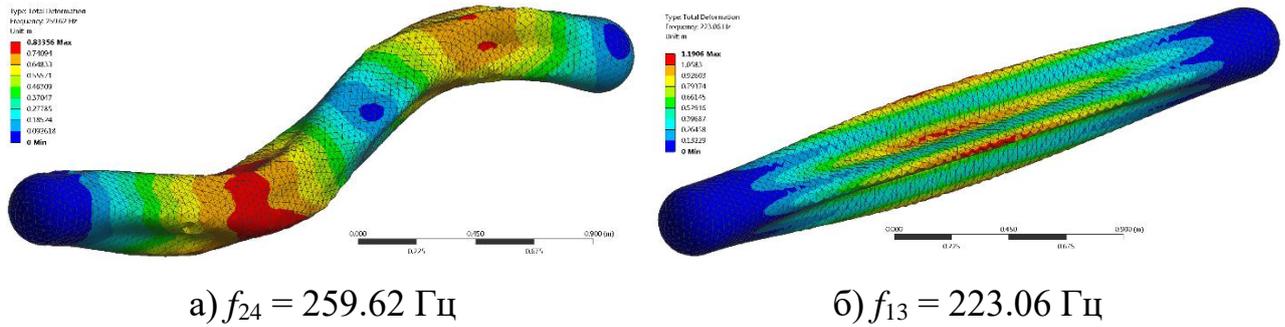


Рисунок 3.5 24-я (а) – вторая изгибная – и 13-я (б) собственные формы и частоты колебаний пневмобалки для случая 2.2 с торцами.

3.3. Численное моделирование обтекания недеформируемого кругового цилиндра потоком вязкой несжимаемой жидкости

3.3.1. Предварительные замечания

Одной из наиболее наиболее распространённых тестовых задач периодического отрывного течения является течение в окрестности цилиндра с образованием вихревой дорожки Кармана [15]. Экспериментальному и численному моделированию данного явления посвящено достаточно много работ [15, 132, 124, 30, 39, 73, 28, 72], кроме того авторы указанных ссылаются на дополнительную литературу по указанной проблеме.

Устойчивое формирование вихревой дорожки наблюдается при сравнительно небольших числах Рейнольдса $30 \leq Re \leq 5000$ [73], в этом диапазоне проведено достаточно много экспериментальных исследований на мелкомасштабных моделях, результаты которых потом использовались для верификации расчетных методик и моделей (например, [15, 28]). Однако, регулярный срыв вихрей, несмотря на значительную степень турбулентности спутной струи, наблюдается и при $Re \geq 4 \cdot 10^6$ [73], а этот случай вполне возможен при рассмотрении обтекания строительных сооружений при скоростях ветра порядка 20 м/с.

В статье [17] говорится о существенных сложностях, в том числе, вычислительных, возникающих при численном моделировании обтекания большеразмерных сооружений при высоких числах Рейнольдса. Об этом свидетельствует и намного меньшее количество научных исследований, как теоретических, так и экспериментальных.

В качестве эталонного источника выбрана статья [124], поскольку в ней численно исследуется обтекание цилиндра при очень высоких числах Рейнольдса (порядка 10^7), а результаты сопоставлены с экспериментальными данными различных исследователей для чисел Рейнольдса сопоставимой величины.

Дополнительным преимуществом данной тестовой задачи является допущение моделирования в двухмерной постановке, что позволяет получить адекватное решение, за приемлемое время и при использовании ограниченных вычислительных ресурсов (1 персональный компьютер, оснащенный 6-ядерным процессором и 16 Гб оперативной памяти).

3.3.2. Постановка задачи

Все исходные данные и постановка задачи соответствуют работе [124], в разделе 3 которой исследуется двухмерное обтекание цилиндрического силоса диаметром $d = 5.5$ м потоком воздуха плотностью $\rho = 1.25$ кг/м³ и вязкостью $\mu = 1.76 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Скорость воздуха на входе в расчетную зону постоянна и равна 31.8 м/с. Интенсивность турбулентных пульсаций принята равной 1% на всей входной границе, масштаб турбулентности равен 1.8 м.

Размер расчетной области перед и по бокам от цилиндра равен $5d = 27.5$ м, за цилиндром – $15d = 82.5$ м.

На поверхности цилиндра задано условие прилипания, на боковых границах – условие симметрии (равенство нулю нормальной компоненты скорости). На выходе из расчетной области принимается постоянное статическое давление.

Численное моделирование выполнено на основе системы нестационарных осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (*URANS*), записанной в переменных «скорость-давление». Для замыкания осреднённых уравнений использована двухпараметрическая модель турбулентности *k- ω SST*, о преимуществах которой указывалось в п. 2.2.3 данной работы.

Все расчеты выполнялись на структурированных многоблочных расчётных сетках со сгущением к поверхности цилиндра с помощью МКО. Пример расчетной сетки размерностью 59500 КО (шифр 4.1) показан на рисунке 3.6.

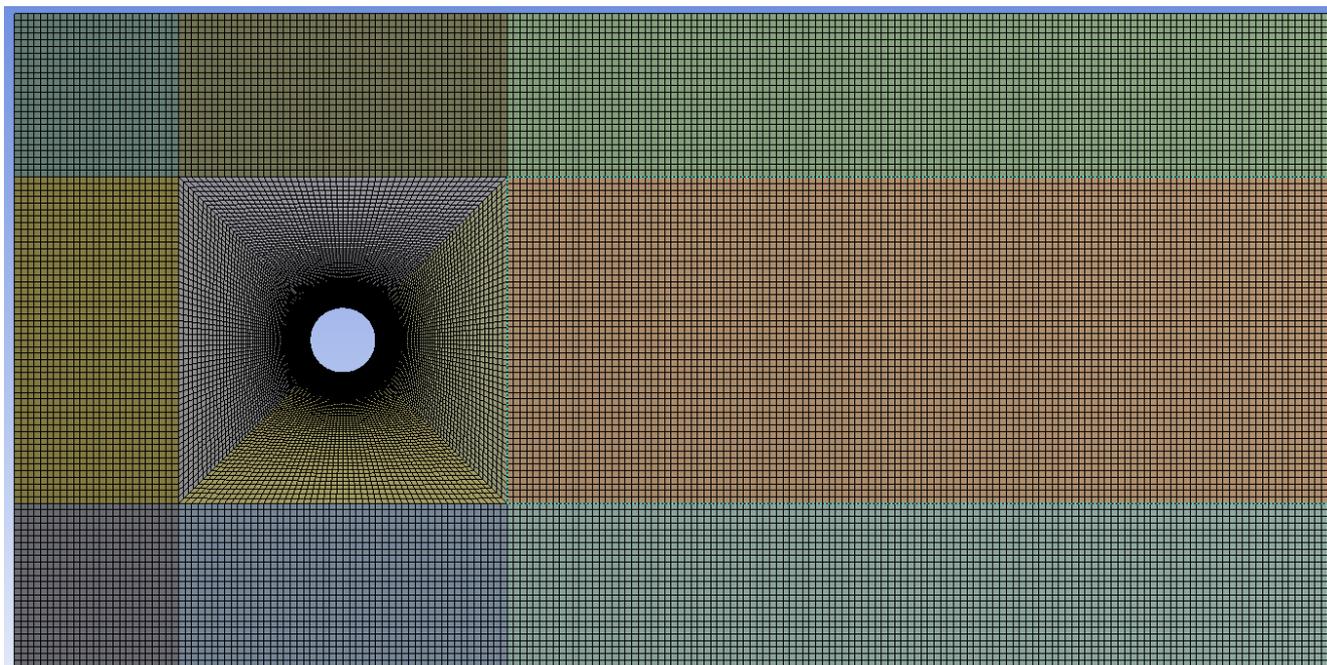


Рисунок 3.6 Структурированная многоблочная расчётная сетка (шифр 4.1)

Были рассмотрены расчетные сетки различной размерности: от 37500 до 130000 КО (см. таблицу 3.4). Толщина первой ячейки вблизи цилиндра принималась в диапазоне от 5 (для самых грубых сеток) до 0.5 мм, что соответствует максимальной величине автомодельной переменной в законе стенки-следа в первом от поверхности узле сетки y^+ от 485 до 51 соответственно. При такой величине y^+ подразумевается, что пограничный слой моделируется с использованием пристеночных функций [88].

Таблица 3.4.

Шифр	Размерность сетки, КО	Толщина 1-го КО, м	y^+_{\max}	Количество КО по окружности
1.1	37500	0.005	485	200
2.1	41500	0.025	248	200
3.1	47500	0.001	103	200
3.2	130000	0.001	100	400
4.1	53500	0.005	51	200

3.3.3. Результаты расчета

Наибольший интерес представляют результаты нестационарного расчета после выхода течения на квазипериодический режим.

Дальнейший анализ результатов проводится для модели с шифром 3.2, показавшей наилучшее соответствие эталонному решению [124], поскольку результаты расчетов для остальных моделей имеют только количественные отличия, оценка которых приведена в таблице

В качестве критериев для сопоставления результатов рассмотрены аэродинамические силы – лобовое сопротивление F_x и подъемная сила F_y (показанные на рисунке 3.7), а также безразмерное число Струхала Sh и, которое определяется по формуле:

$$Sh = \frac{fd}{U_{\infty}}, \quad (3.8)$$

где f – частота срыва вихрей;

U_{∞} – скорость набегающего потока;

d – диаметр цилиндра.

Основная частота срыва вихрей с поверхности цилиндра определялась по спектру подъемной силы F_y (см. рисунок 3.8), полученного с помощью быстрого преобразования Фурье.

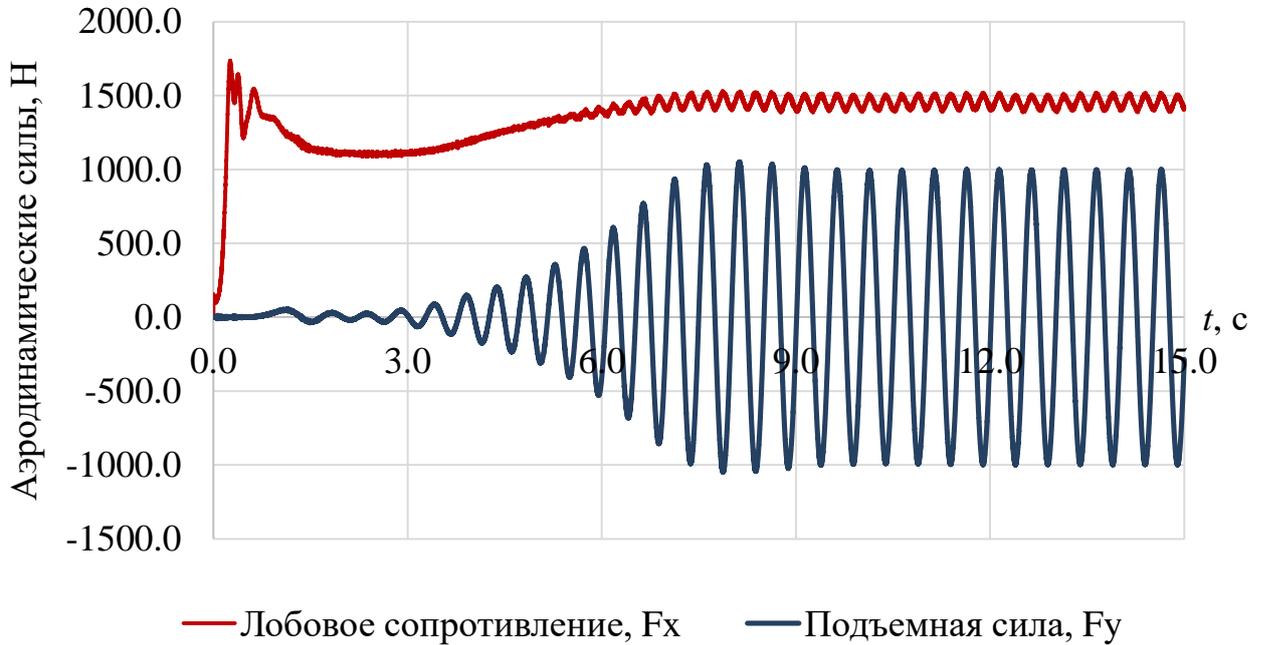


Рисунок 3.7. Величины аэродинамических сил

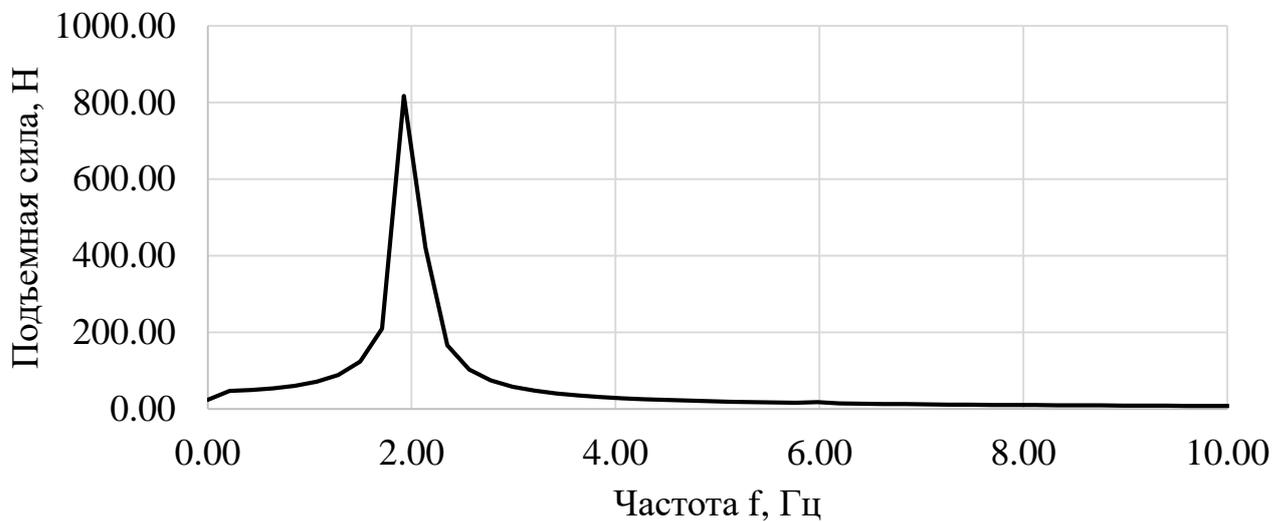


Рисунок 3.8. Спектр подъемной силы F_y

Вихревая дорожка Кармана лучше всего иллюстрируется мгновенным полем завихренности, показанным на рисунке 3.9.

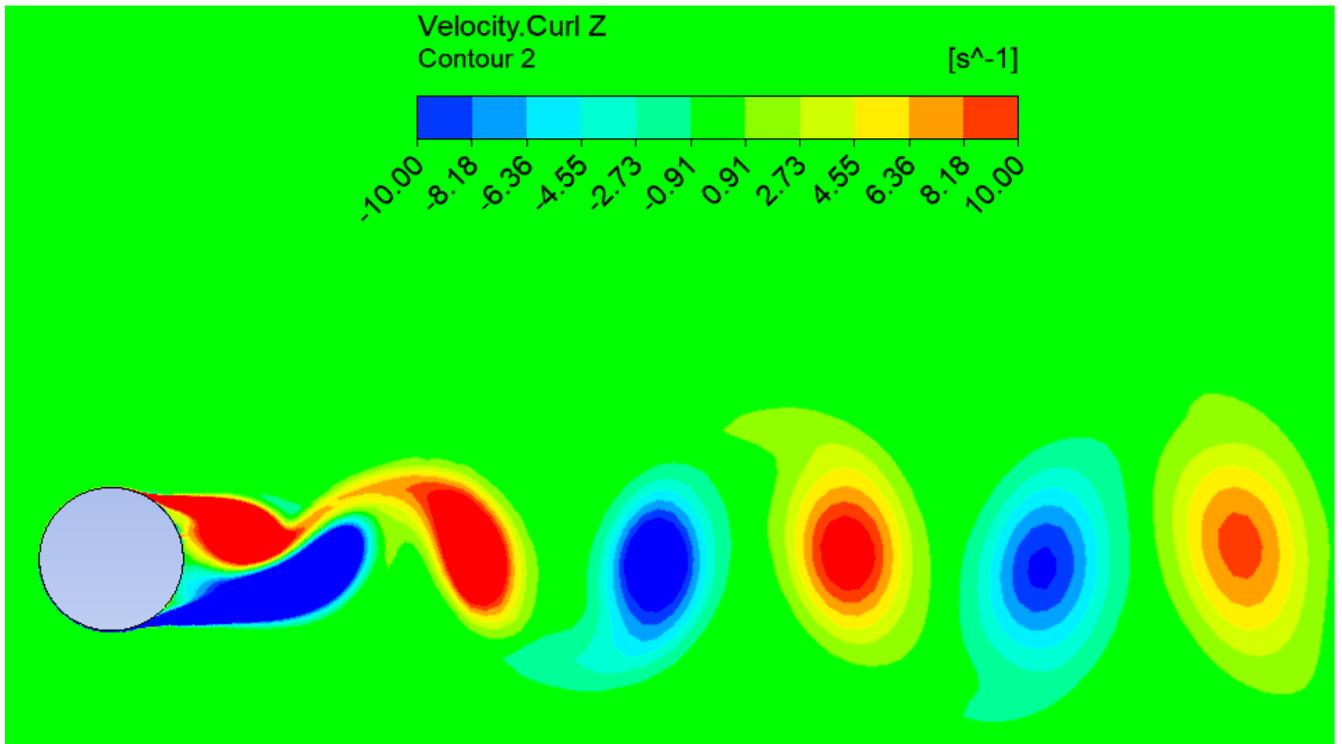


Рисунок 3.9. Мгновенное поле завихренности

Осредненное за один период срыва вихрей поле давлений показано на рисунке 3.10, а). Для сравнения на рисунке 3.10, б) показано мгновенное поле давлений в момент времени $t = 11$ с (без осреднения).

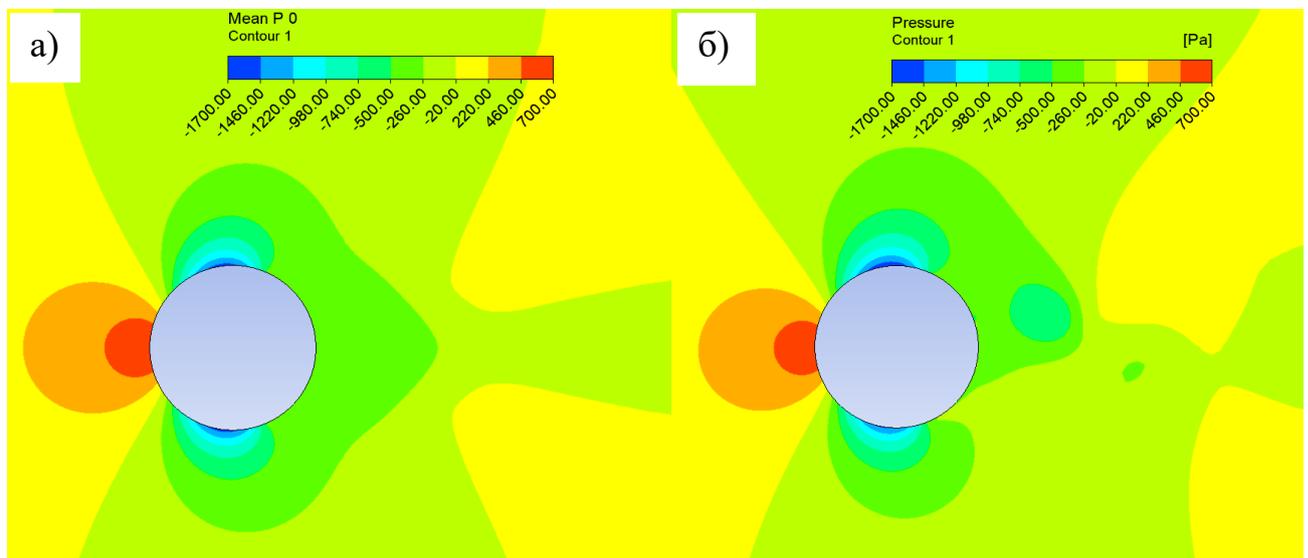


Рисунок 3.10. Поле давлений: а) осредненное; б) мгновенное.

Сопоставление результатов для различных расчетных сеток, использованных в данной работе, с эталонными данными показано в таблице 3.5.

Таблица 3.5

Шифр	y^+ max	F_x ср, Н	F_y max, Н	C_x ср.	Δ , %	C_y max	Δ , %	ν , Гц	Sh	Δ , %
1.1	480.6	1730.6	1218.8	0.498	31.7	0.351	11.9	1.748	0.302	11.1
2.1	248.0	1523.0	890.1	0.438	14.2	0.256	15.9	1.894	0.328	3.7
3.1	102.9	1409.0	790.0	0.405	4.5	0.227	24.3	2.098	0.363	6.7
3.2	99.5	1453.7	1001.1	0.418	8.3	0.288	6.5	1.923	0.333	2.2
4.1	51.0	1342.8	901.4	0.386	1.1	0.259	14.9	2.099	0.363	6.8
Эталон [124]	97	1460.0	1077.6	0.420	8.8	0.310	0.0	1.850	0.320	5.9
	4	1355.7	1077.6	0.390	-	0.310	-	1.966	0.340	-

На рисунке 3.11 показана таблица с результатами экспериментальных и численных исследований различных авторов, приведенная в работе [124].

	$Re (\times 10^7)$	St	θ_s (°)	$-\bar{C}_p^b$	$-\bar{C}_p^{\min}$	\bar{C}_d
Present numerical simulations						
2D URANS SST, $y^+_{\max}=97$	1.24	0.32	116	0.52	2.54	0.42
2D URANS SST, $y^+_{\max}=4$	1.24	0.34	116	0.49	2.62	0.39
Experimental data from literature						
Zan (2008)	0.20–0.50	0.20				
Schewe (1983)	0.50–0.60	0.27				0.52
James et al. (1980)	0.01–1.09	0.22				
Zdravkovich (1997)	0.73–3.65	0.27–0.32	100–110	0.5–0.8		0.4–0.8
Eurocode 1—Part 1.4 (BIN, 2005)	1.00	0.18	105	0.80	1.5	
Numerical simulations from the literature						
2D URANS $k-\varepsilon$ transition (Celik and Shaffer, 1995)	0.36		118	0.35	2.3	
2D URANS realizable $k-\varepsilon$ (Holloway et al., 2004)	1.00		120			0.26
2D URANS transition (Holloway et al., 2004)	1.00		119			0.25
2D URANS $k-\varepsilon$ (Saghaifan et al., 2003)	0.84	0.25	104	0.72	1.8	0.66
2D URANS nonlinear (Saghaifan et al., 2003)	0.84	0.33	125	1.15	2.6	0.61
2D URANS RNG $k-\varepsilon$ (Younis and Przulj, 2006)	0.35	0.28	122	0.80	2.5	0.56
2D URANS modified $k-\varepsilon$ (Younis and Przulj, 2006)	0.35	0.28	120	1.25	2.5	0.72
3D DES (Travin et al., 2000)	0.30	0.35	111	0.53	2.2	0.41
3D DES + curvature (Travin et al., 2000)	0.30	0.33	106	0.64	2.1	0.51
3D URANS $k-\varepsilon$ (Catalano et al., 2003)	0.10	0.31		0.41	2.3	0.40
3D LES Smagorinsky (Catalano et al., 2003)	0.10	0.35		0.32	2.4	0.31

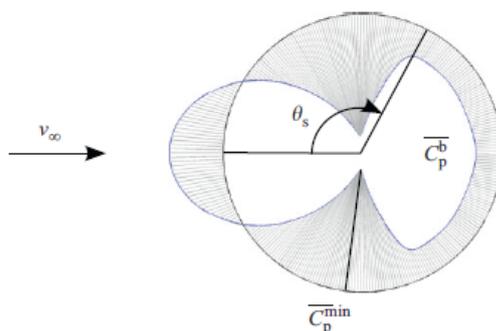


Рисунок 3.11. Подборка результатов различных исследований обтекания цилиндра при сверхбольших числах Рейнольдса [124]

Разброс результатов может объясняться различной степенью удлинения цилиндров, различной шероховатостью моделей, различием в величине числа Рейнольдса, неточностями используемых численных моделей и алгоритмов.

На рисунке 3.12 показан график осредненного коэффициента давления C_p , полученный для модели 3.2, показавшей наилучшее соответствие эталонным результатам.

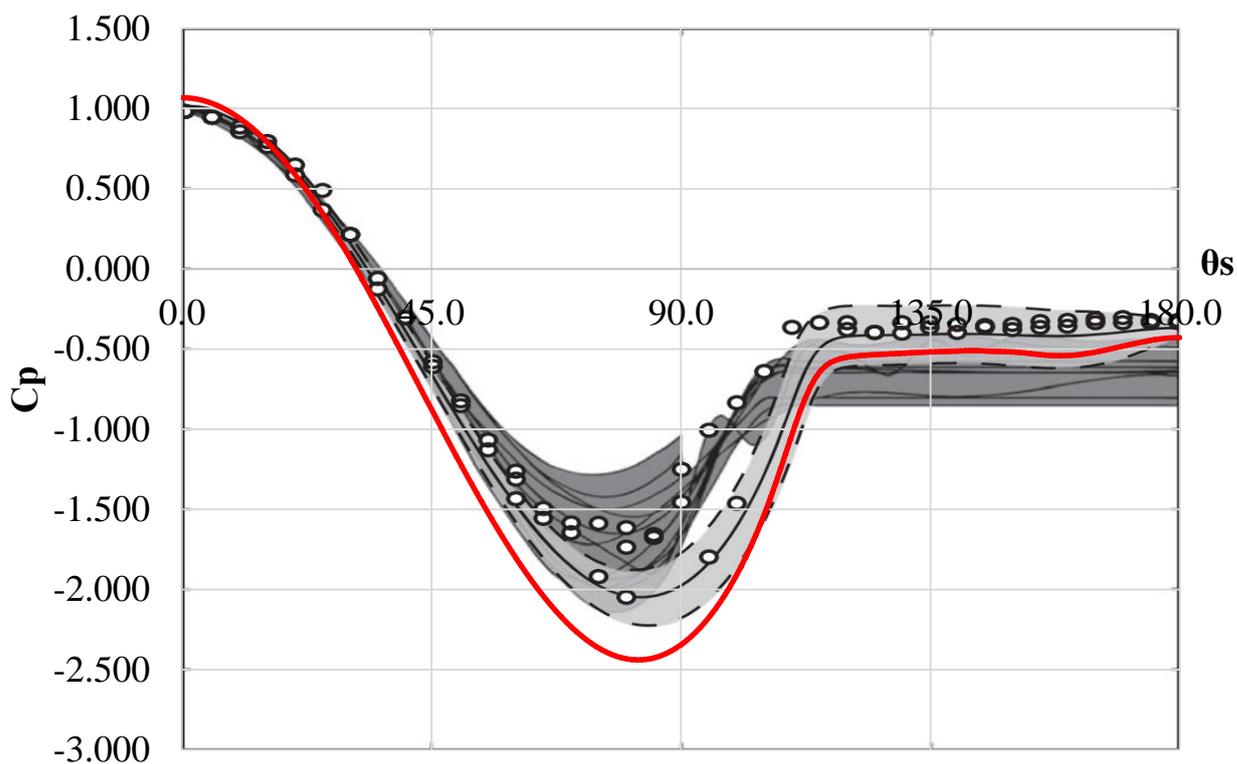


Рисунок 3.12. Аэродинамический коэффициент давления вдоль окружности цилиндра: — — результаты диссертанта для модели 3.2; темно-серая зона — результаты экспериментов, проведенных Zdravkovich; светло-серая зона — численные результаты автора работы [124]; о — результаты экспериментов, проведенных Shih.

Заметим, что расхождение численных и экспериментальных результатов в зоне максимального отсоса C_p^{\min} наблюдается также и в других работах, например [28], а также на рисунке 3.11 для эталонного результата при $y^+ = 4$ [124] указана величина $C_p^{\min} = -2.62$, в то время как на рисунке 3.12 она достигает лишь -2.25. В любом случае максимальное отклонение от эталонных данных не превышает 10%.

На основании полученных результатов можно заключить, что тестовая задача по обтеканию цилиндра воздушным потоком успешно решена диссертантом.

3.4. Свободные колебания гибкой пластины, находящейся в вязкой несжимаемой жидкости

3.4.1. Описание расчетной модели

Рассматривается вертикальная упругая прямоугольная пластина, защемленная снизу, которая сначала деформируется под действием приложенного равномерно распределенного давления $p = 75$ Па в течение 0.5 с, затем в течение 0.01 с нагрузка перестает действовать, и пластина совершает свободные колебания. Пластина окружена вязкой жидкостью, поэтому колебания со временем затухают (см. рисунок 3.13).

Заметим, что прогибы пластины от действия указанной нагрузки в несколько раз превышают её толщину, т.е. имеет место случай больших перемещений, и задачу нужно решать в геометрически нелинейной постановке.

Исследуемыми параметрами являются частоты и формы свободных колебаний пластины, силы сопротивления, которые приложены на пластину со стороны жидкости, а также скорость затухания колебаний в зависимости от вязкости окружающей жидкости.

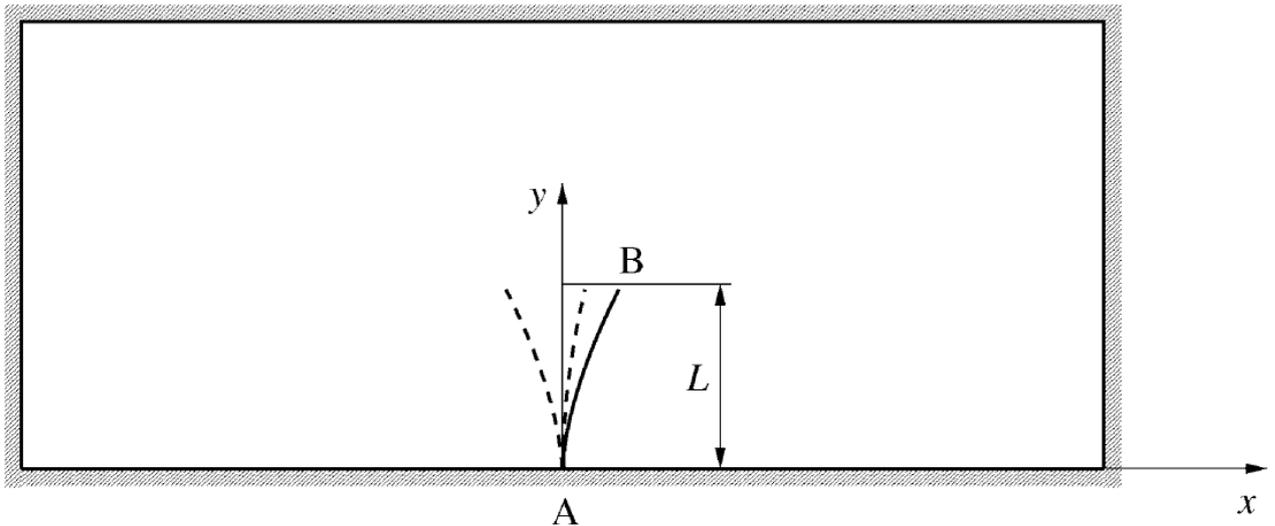


Рисунок 3.13. Постановка задачи о колебаниях пластины в вязкой жидкости

Численное решение данной задачи в двумерной связанной постановке впервые представлено в работе [122]. Другими исследователями получены близкие результаты [115, 132, 134, 138].

В работе [134] показано, что при решении данной задачи в *ANSYS Mechanical* можно получить слишком быстрое затухание колебаний по сравнению с эталонным решением в силу дополнительного численного демпфирования («*Numerical damping*»), которое служит для стабилизации схемы численного интегрирования уравнений движения путем гашения высокочастотных форм колебаний [103]. Поскольку в работе [122] моделировалось только затухание колебаний пластины из-за взаимодействия с вязкой жидкостью, то и при решении задачи в *ANSYS Mechanical* дополнительное численное демпфирование должно быть сведено к минимуму. Как показали расчеты, установленное по умолчанию значение коэффициента численного демпфирования 0.1 приводит к расхождению результатов с источником, в расчетах использовалось близкое к нулю значение 0.001.

Упругая пластина имела следующие размеры: высота $L = 1.0$ м, ширина $B = 0.4$ м, толщина $h = 0.06$ м.

Равномерно распределенное давление, приложенное к пластине в течение первых 0.5 с равно $p = 75$ Па. Нагрузка снимается в течение последующих 0.01 с.

Материал оболочки линейно-упругий изотропный со следующими характеристиками: модуль упругости $E = 2.5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.35$, плотность $\rho = 2550$ кг/м³.

Размеры расчетной области в форме прямоугольного параллелепипеда для жидкости вокруг пластины составляют 20.06x6.00x0.4 м.

Плотность жидкости принималась равной $\rho_f = 1$ кг/м³. Рассматривалось 3 значения динамической вязкости: $\mu_{f,1} = 0.2$ Па·с, $\mu_{f,1} = 1.0$ Па·с, $\mu_{f,1} = 5.0$ Па·с.

Была использована структурированная многоблочная расчетная сетка со сгущением к поверхности пластины и нижней части расчетной области, которая включала 7650 шестигранных ячеек.

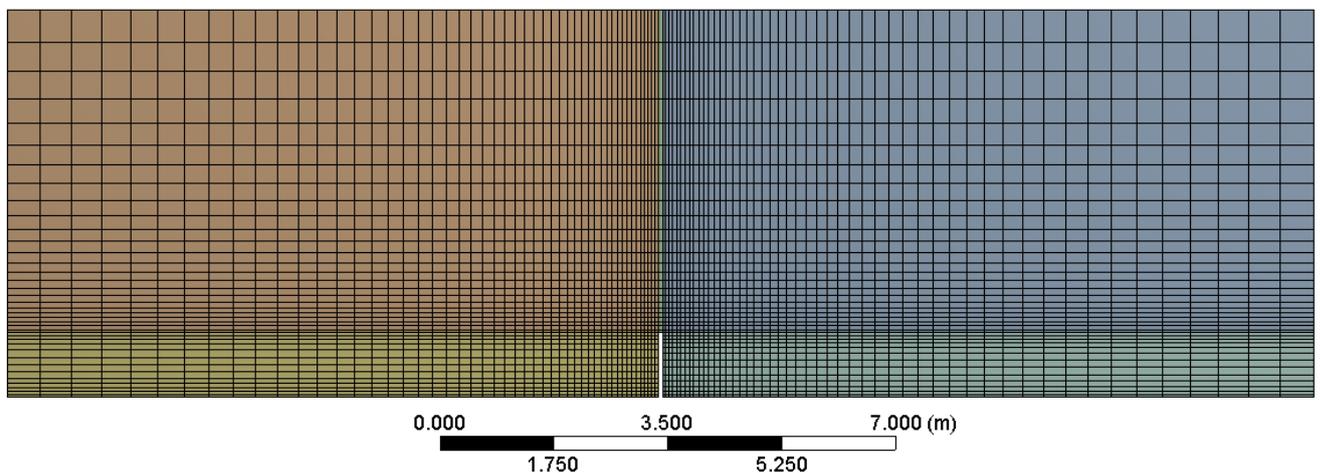


Рисунок 3.14 Базовая расчетная сетка (≈ 7700 ячеек), использованная в *ANSYS Fluent*

В работе [122] изучались двумерные колебания пластины, поэтому по боковым вертикальным граням (параллельным плоскости xu на рисунке 3.13) наложены условия симметрии, т.е. равенство нулю нормальной компоненты скорости. На остальных гранях наложены граничные условия прилипания, т.е. равенство нулю всех компонент скорости.

Шаг по времени принимался равным $\Delta t = 0.05-0.1$ с.

3.4.2. Оценка результатов

После снятия нагрузки пластина совершает свободные затухающие колебания. Формы свободных колебаний зависят от закрепления пластины, вида действующей нагрузки, а также распределения масс.

Сопоставление результатов расчета перемещений верхнего (незакрепленного) края пластины для различных величин динамической вязкости жидкости показаны на рисунке 3.15.

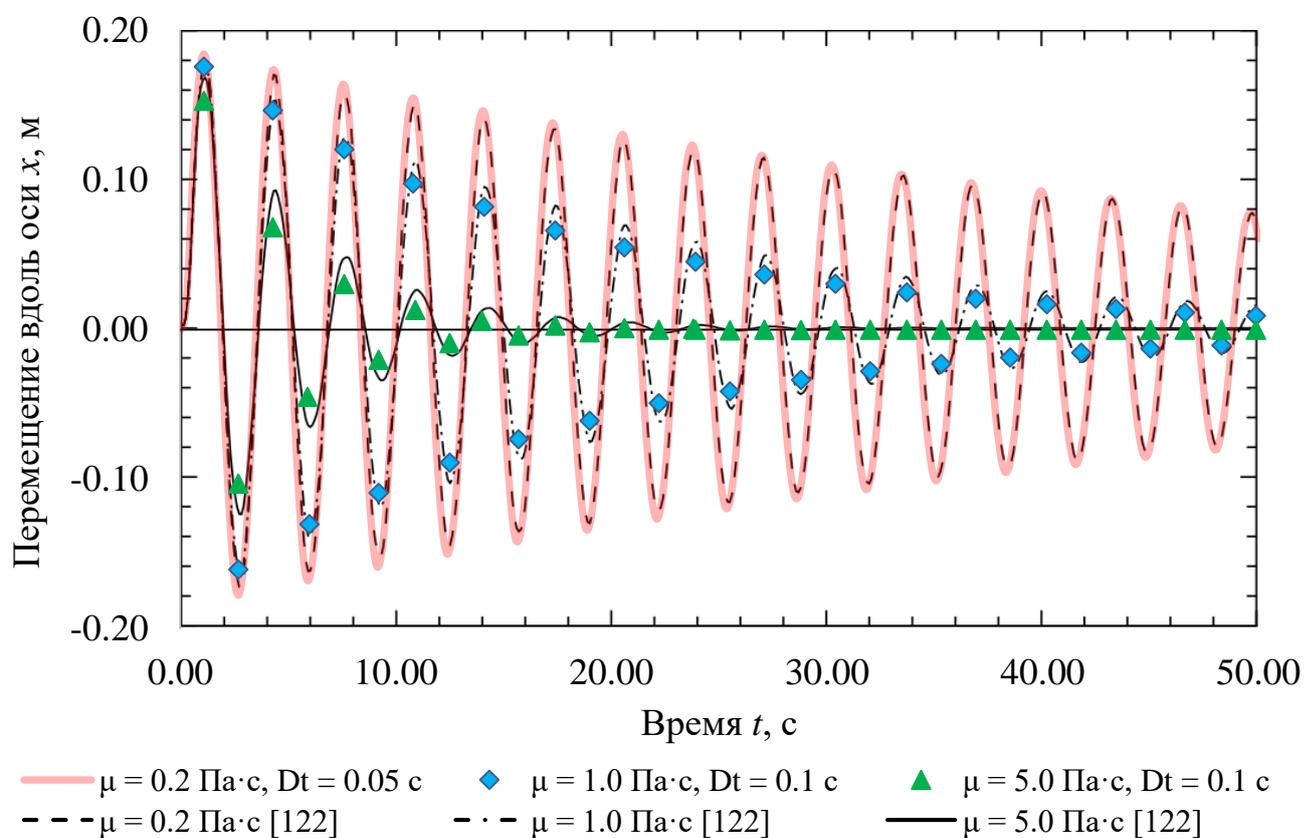


Рисунок 3.15 Перемещения верхнего края пластины

При анализе результатов, изображенных на рисунке 3.15, можно заметить, что наилучшее и практически полное совпадение результатов как по частоте, так и амплитуде колебаний достигается для случая $\mu_{f,1} = 0.2 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\Delta t = 0.05 \text{ с}$ (розовая линия). Это явление объясняется в работе [134] тем, что влияние численного демпфирования ослабевает при уменьшении шага интегрирования по времени.

В целом, даже несмотря на некоторое расхождение результатов можно считать соответствие решения эталону [122] удовлетворительным.

Перейдем к оценке полученных частот колебаний пластины.

Поскольку задача рассматривается в квазидвухмерной постановке, т.е. пластина рассматривается как стержень, который колеблется в плоскости xu , ожидаемо, что колебания в плоскости пластины uz , а также крутильные колебания возбуждаться не будут.

Собственные частоты для изгибных форм колебаний пластины соответствуют собственным частотам колебания консольной балки прямоугольного поперечного сечения. Для первых трёх изгибных форм колебаний в книге [80, с. 382] приводятся следующие формулы:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} (1.875)^2 \\ f_2 &= \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} (4.694)^2 \\ f_3 &= \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} (7.855)^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $l = 1$ м – длина стержня (высота пластины);

$I = \frac{bh^3}{12}$ – момент инерции поперечного сечения стержня,

$$I = \frac{0.4 \cdot 0.06^3}{12} = 7.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$F = bh$ – площадь поперечного сечения стержня, $F = 0.4 \cdot 0.06 = 0.024 \text{ м}^2$.

Сопоставление собственных частот пластины, полученных по формулам (3.9), приведенных в статье [122], а также определенных автором в вычислительном комплексе *ANSYS Workbench* с помощью МКЭ при различном размере сетки конечных элементов (d – размер ребра КЭ) показано в таблице 3.6 (m и n – число полуволн из плоскости и в плоскости пластины соответственно).

Поскольку при использовании КЭ с размерами ребер 0.03 и 0.02 м результаты практически совпадают, то для ускорения расчетов была использована более крупная сетка, состоящая из 952 КЭ.

Как видно из таблицы, расхождение результатов с источником не превышает 6%, при этом наши результаты лучше соответствуют аналитическому решению для частот свободных колебаний стержня прямоугольного сечения.

Собственные формы колебаний пластины показаны на рисунке 3.16. Нетрудно заметить, что изгибными из плоскости пластины являются 1-я, 4-я и 6-я формы колебаний, именно по ним будут возбуждаться колебания после снятия нагрузки, перпендикулярной пластине.

Таблица 3.6

Форма колебаний	Собственная частота, f_i , Гц				
	ANSYS Mechanical, решение автора			Источники [80] / [122]	Δ , %
	$d = 0.06$ м, 119 КЭ	$d = 0.03$ м, 952 КЭ	$d = 0.02$ м, 3000 КЭ		
1. Изгибная xu , $m = 0.5, n = 0$	0.3131	0.3111	0.3108	0.30345 / 0.31	2.43 / 0.26
2. Крутильная, $m = 0.5, n = 0$	1.5079	1.4958	1.4947	-	-
3. Изгибная, uz $m = 0, n = 0.5$	1.8265	1.8250	1.8243	-	-
4. Изгибная xu , $m = 1, n = 0$	1.9243	1.9089	1.9071	1.90181 / 1.85	0.28 / 3.09
5. Крутильная, $m = 1.5, n = 0$	4.7639	4.7197	4.7159	-	-
6. Изгибная xu , $m = 2, n = 0$	5.2748	5.2218	5.2162	5.32566 / 4.93	2.06 / 5.81

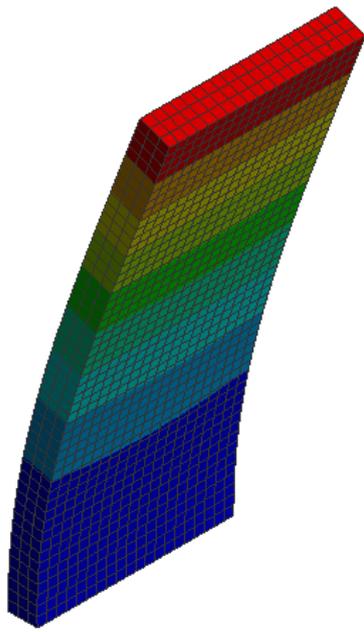
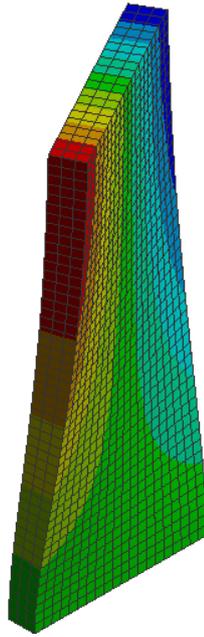
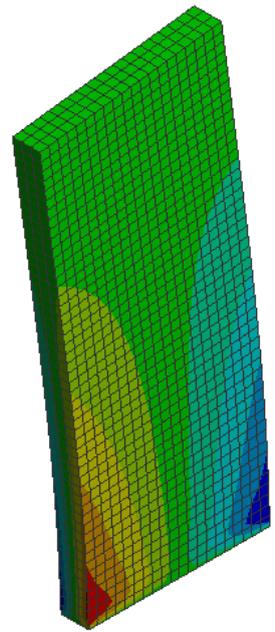
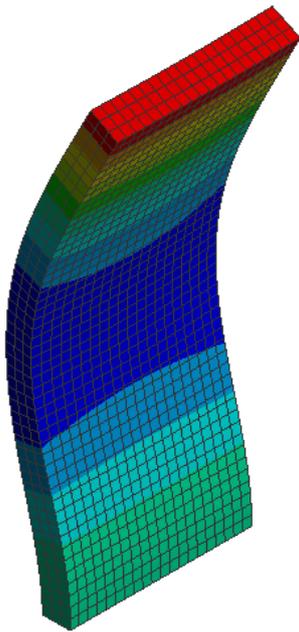
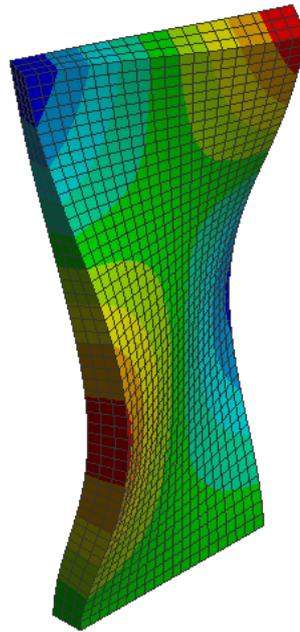
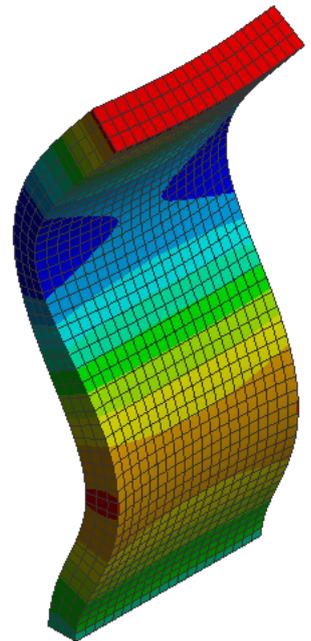
1 форма, $f_1 = 0.3108$ Гц2 форма, $f_2 = 1.4947$ Гц3 форма, $f_3 = 1.8243$ Гц4 форма, $f_4 = 1.9071$ Гц5 форма, $f_5 = 4.7159$ Гц6 форма, $f_6 = 5.2162$ Гц

Рисунок 3.16 Собственные формы колебаний пластины, полученные с помощью *ANSYS Workbench* ($d = 0.02$ м, 3000 КЭ)

Приведем также сравнение результатов полученных путем быстрого преобразования Фурье, примененного к горизонтальной нагрузке, действующей со стороны жидкости на пластину (см. рисунок 3.17).

Можно заметить, что пики амплитуды хорошо соответствуют собственным частотам изгибных колебаний пластины №1, 4 и 6.

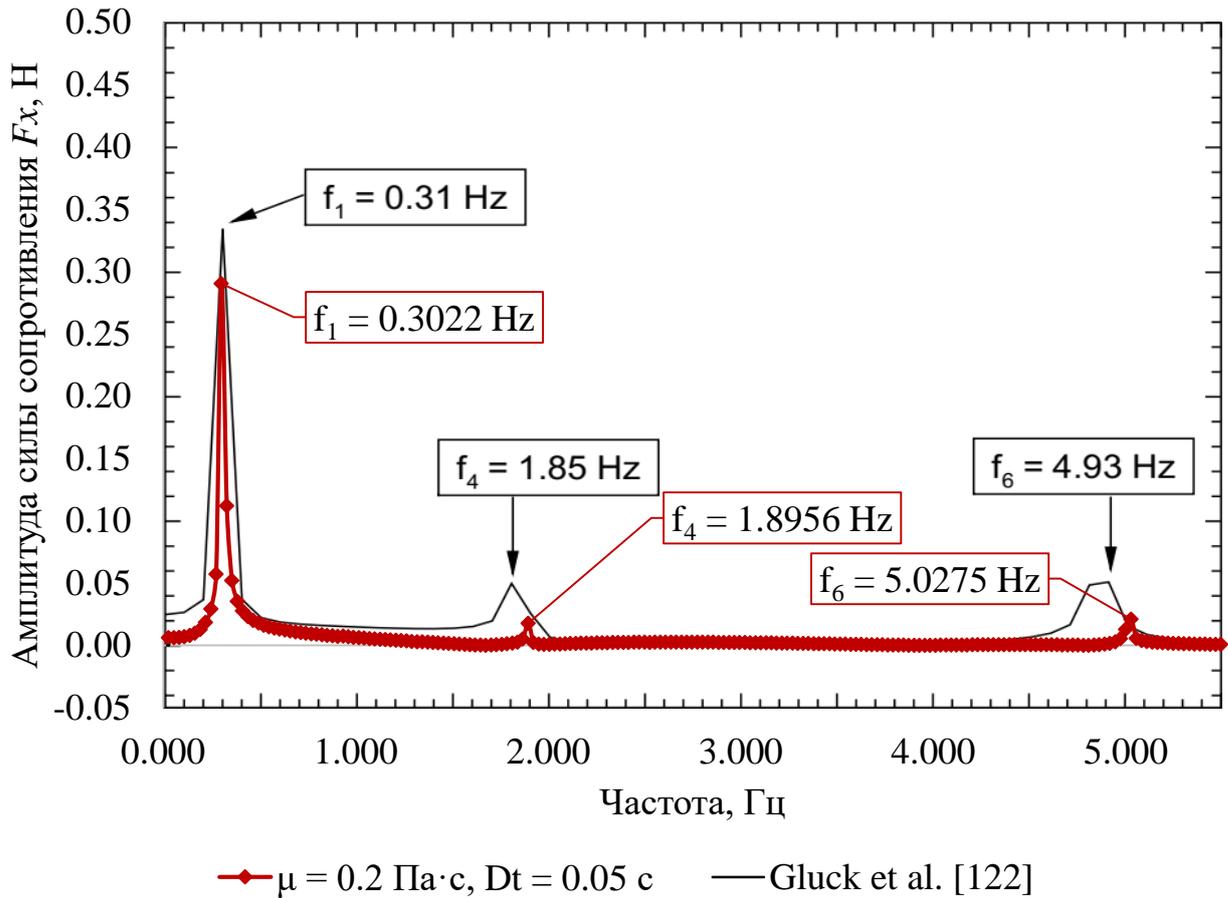


Рисунок 3.17 Сопоставление результатов быстрого преобразования Фурье горизонтальной силы сопротивления, действующей на пластину со стороны жидкости

3.5. Изгиб пластины, обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью

3.5.1. Постановка задачи

Подобные задачи часто служат в качестве тестовых и описаны во многих работах [87, 122, 132, 106, 150]. В зависимости от области исследований авторов, размеры пластины и характеристики набегающего потока могут быть различными. Например, в работе [132] рассмотрено обтекание прямоугольной пластины при различных углах атаки.

В данной работе в качестве эталонного принято численное решение задачи в связанной постановке, описанное в работе [122]. Упругая прямоугольная пластина, заземленная снизу, деформируется стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. В статье приведены результаты расчета перемещений верхней точки для пластин различной толщины h : 3, 4 и 10 мм.

Расчетная схема задачи приведена на рисунке 3.18.

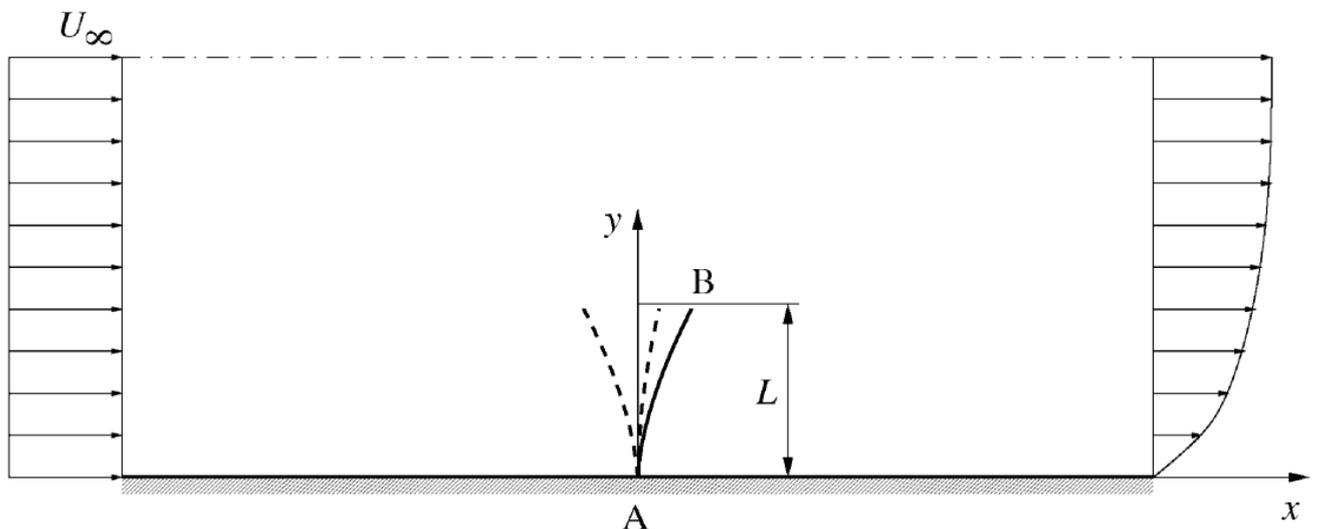


Рисунок 3.18. Геометрия расчетной схемы

Базовая структурированная расчетная сетка была принята размерностью порядка 7700 ячеек и аналогична показанной на рисунке 3.14. Кроме того, были

получены решения при увеличении количества ячеек в 4 (около 30500 ячеек) и 16 раз (около 120000 ячеек).

На входе в расчётную область (левая граница) задан равномерный поток несжимаемой жидкости, набегающей со скоростью $U_\infty = 10$ м/с при атмосферном давлении $p_\infty = 10^5$ Па. Плотность жидкости $\rho = 1$ кг/м³, вязкость $\mu = 0.2$ Па·с. В выходном сечении было задано значение статического давления $p = p_\infty$. На поверхности пластины задано условие прилипания. На верхней границе расчётной области задано условие непротекания, т. е. равенство нулю нормальной компоненты скорости. Нижняя часть расчётной области задана в виде стенки, допускающей свободное скольжение потока (нормальная компонента скорости и напряжения сдвига равны нулю).

Высота пластины $L = 1$ м. Длина расчётной области принята равной 20 м, высота – 6 м, ширина – 0.4 м. Механические характеристики материала пластины приведены ниже. Количество ячеек в направлении ширины расчётной области во всех случаях принималось равным двум.

$$\text{Число Рейнольдса } Re = \frac{U_\infty L \rho}{\mu} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 1}{0.2} = 50, \text{ что соответствует ламинарному}$$

течению, поэтому модели турбулентности в данной задаче не используются.

Для численного моделирования жидкости использовался модуль *ANSYS Fluent*, основанный на применении метода конечных (контрольных) объемов. Расчётная сетка перестраивалась на каждой итерации обмена данными между решателями. Пример расчётной сетки в конце расчёта показан на рисунке 3.20.

Расчётная сетка для расчёта упругого поведения пластины состояла из 1280 объемных шестигранных КЭ с максимальным размером ребра $d = 0.025$ м, при этом во всех случаях в направлении толщины пластины принималось не менее двух конечных элементов (для пластины толщиной 100 мм было использовано 4 КЭ по толщине). Расчёт производился в геометрически нелинейной постановке (активна опция «*Large Deflection*») с помощью метода Ньютона-Рафсона. Шаг по времени составил 0.01 с.

Для ускорения затухания колебаний пластины матрица демпфирования в задавалась в виде суммы матрицы масс, умноженной на коэффициент равный 1.0. Поскольку производился квазистационарный расчет, величина демпфирования влияла только на скорость затухания колебаний в переходном режиме, и не влияла на итоговую равновесную конфигурацию системы.

В ходе расчетов была выявлена особенность работы ВК *ANSYS*, осложняющая проведение расчетов тонкостенных конструкций в связанной постановке.

Поскольку в *ANSYS* двухмерные тела представляются только одной поверхностью, т.е. отсутствует разделение на «лицевую» и «обратную» стороны, то было принято решение моделирования пластины в виде трехмерного тела, с непосредственным заданием ее толщины. Однако, возникла сложность при назначении интерфейсных поверхностей на переднюю и заднюю плоскости пластины возникли проблемы, поскольку эти плоскости расположены достаточно близко. Серия пробных расчетов показала, что при расстоянии между параллельными интерфейсными поверхностями меньше 12 мм обмен данными между решателями происходит некорректно, что приводит к получению ошибочного решения задачи.

Для получения корректного решения был применен следующий способ: расстояние между передней и задней интерфейсными поверхностями (толщина пластины) было увеличено в 10 раз при сохранении остальных размеров пластины неизменными. Для воспроизведения механического поведения системы и возможности сравнения результатов расчета с источником [122] было обеспечено соответствие цилиндрической жесткости, общей массы и частот собственных колебаний исходной и измененной (с увеличенной толщиной пластины) систем за счет изменения модуля упругости E и плотности материала пластины ρ (см. таблицу 3.7).

Следует отметить, что аэродинамическая нагрузка при увеличении толщины пластины практически не изменилась, поскольку отрыв потока происходит с передней кромки пластины.

Таблица 3.7

Параметр системы	Источник [122]			Данная работа		
Модуль упругости, E , МПа	3500			3.5		
Коэффициент Пуассона	0.32			0.32		
Толщина пластины, h , м	0.003	0.004	0.010	0.03	0.04	0.10
Цилиндрическая жесткость, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, Нм	8.77	20.80	324.9	8.77	20.80	324.9
Плотность, ρ , кг/м ³	1200			120		
Параметр, пропорциональный собственным частотам пластины, $\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$, м ² /с	1.56	2.08	5.20	1.56	2.08	5.20
Общая масса пластины, кг	1.44	1.92	4.80	1.44	1.92	4.80

3.5.2. Сопоставление решения связанной задачи с источником

Поскольку рассматривалось установившееся течение, то в таблице 3.8 показано сравнение установившихся перемещений середины верхнего переднего ребра X_B пластины в момент времени $t = 3$ с, когда колебания пластины уже прекратились.

Таблица 3.8

Толщина, мм (согласно [122])	Горизонтальное перемещение X_B , м ($t = 3$ с)				Δ , %
	7700 КО	29500 КО	118 800 КО	Источник [122]	
3	0.5701	0.57204	0.57532	0.586	1.86
4	0.3754	0.37677	0.37901	0.361	4.99
10	0.0363	0.03649	0.03656	0.034	7.53

Заметим, что сгущение сетки приводит к изменению не более 1%, можно считать, что сеточная сходимость достигнута уже на втором шаге (сетка для жидкости порядка 29000 КО), для которого и приведены результаты на рисунке 3.19.

Различие в расчетах с эталонным источником [122] не превышает 8%, что можно считать удовлетворительным результатом, поскольку сравниваются два численных решения. Увеличение относительной разницы в результатах для пластины толщиной 10 мм объясняется следующими факторами:

- колебания пластины в эталонном расчете не успели полностью остановиться в расчетный момент времени $t = 3$ с;
- абсолютная величина перемещений достаточно мала;
- допущена неточность при снятии результата из источника, поскольку он взят с графика (см. рисунок 3.19).

Различие результатов в переходном режиме можно объяснить тем, что величина перемещений зависит от скорости приложения нагрузки. В работе [122] эта информация не содержится, поэтому скорость приложения нагрузки от потока жидкости может отличаться. На величину установившегося перемещения данный параметр не влияет.

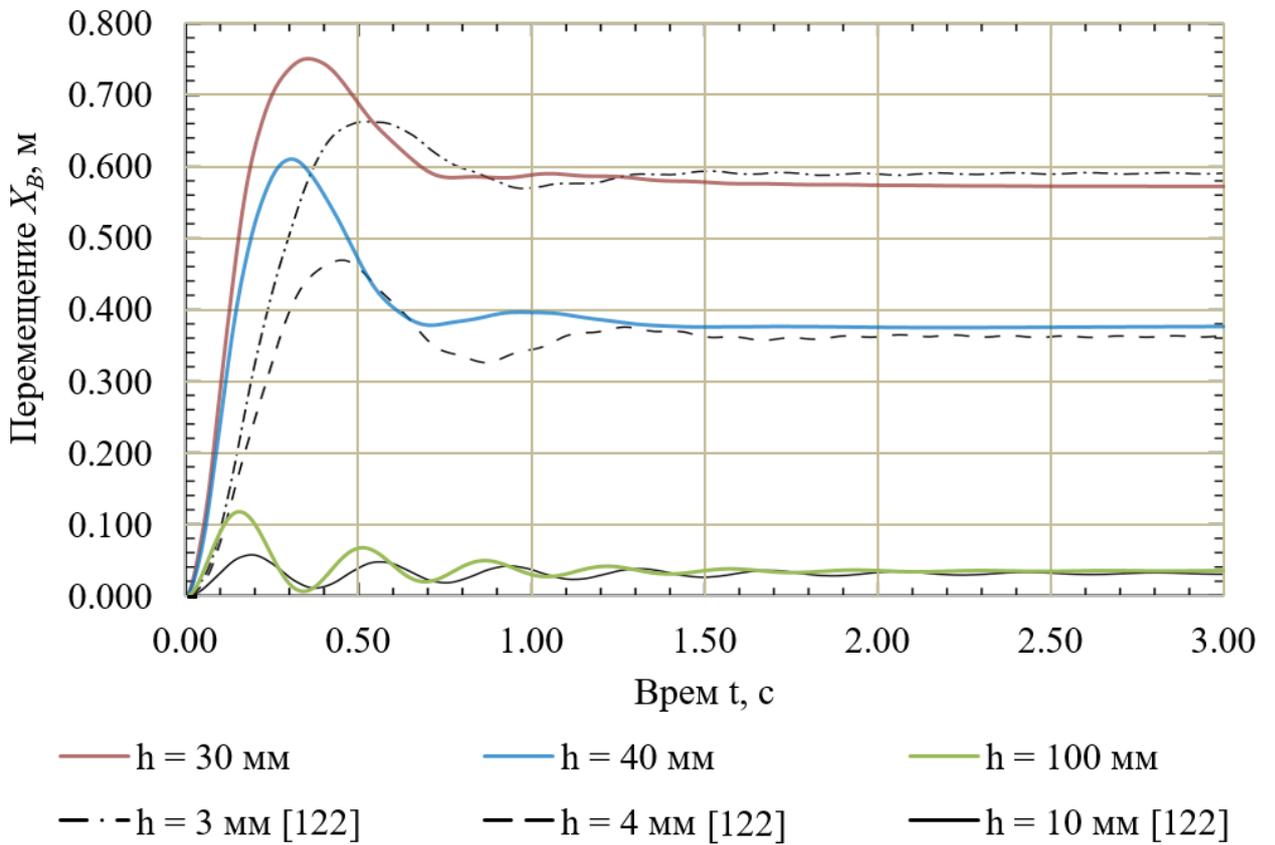


Рисунок 3.19 Перемещения верхнего края пластины

3.5.3. Сопоставление результатов расчета двусторонне и односторонне связанных задач

На рисунке 3.20 показана расчетная сетка размерностью 29500 КО для пластины толщиной $h = 30$ мм в момент времени $t = 3$ с после двусторонне связанного расчета. Деформации пластины показаны в реальном масштабе.

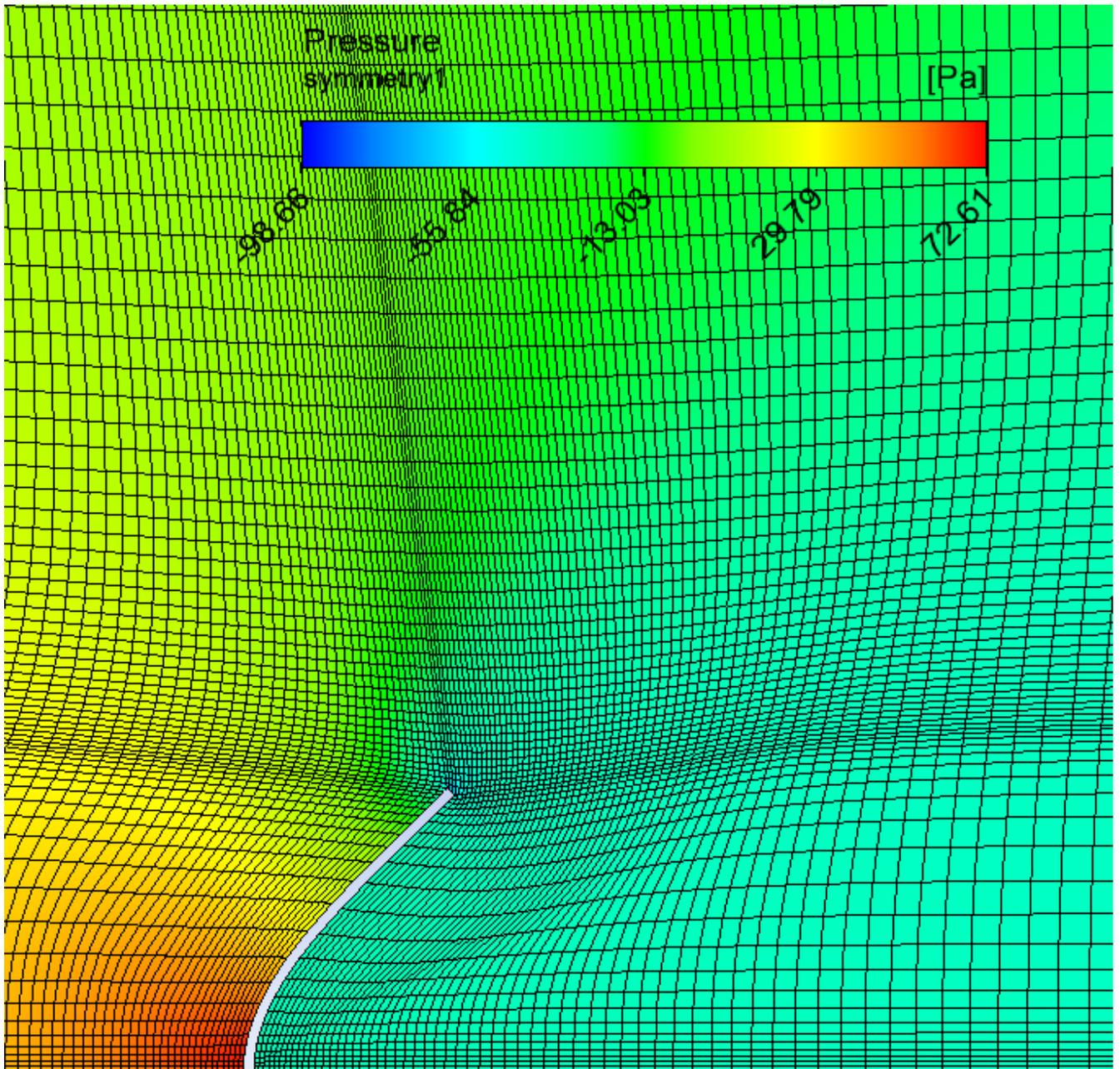


Рисунок 3.20. Изополе давления жидкости и расчетная сетка размерностью 29500 КО для пластины $h = 30$ мм в момент времени $t = 3$ с (результат двусторонне связанного расчета)

Для сопоставления результатов на рисунке показано изополе скорости жидкости и расчетная сетка размерностью 29500 КО для одностороннего расчета (расчет обтекания недеформированной пластины) пластины также в момент времени $t = 3$ с.

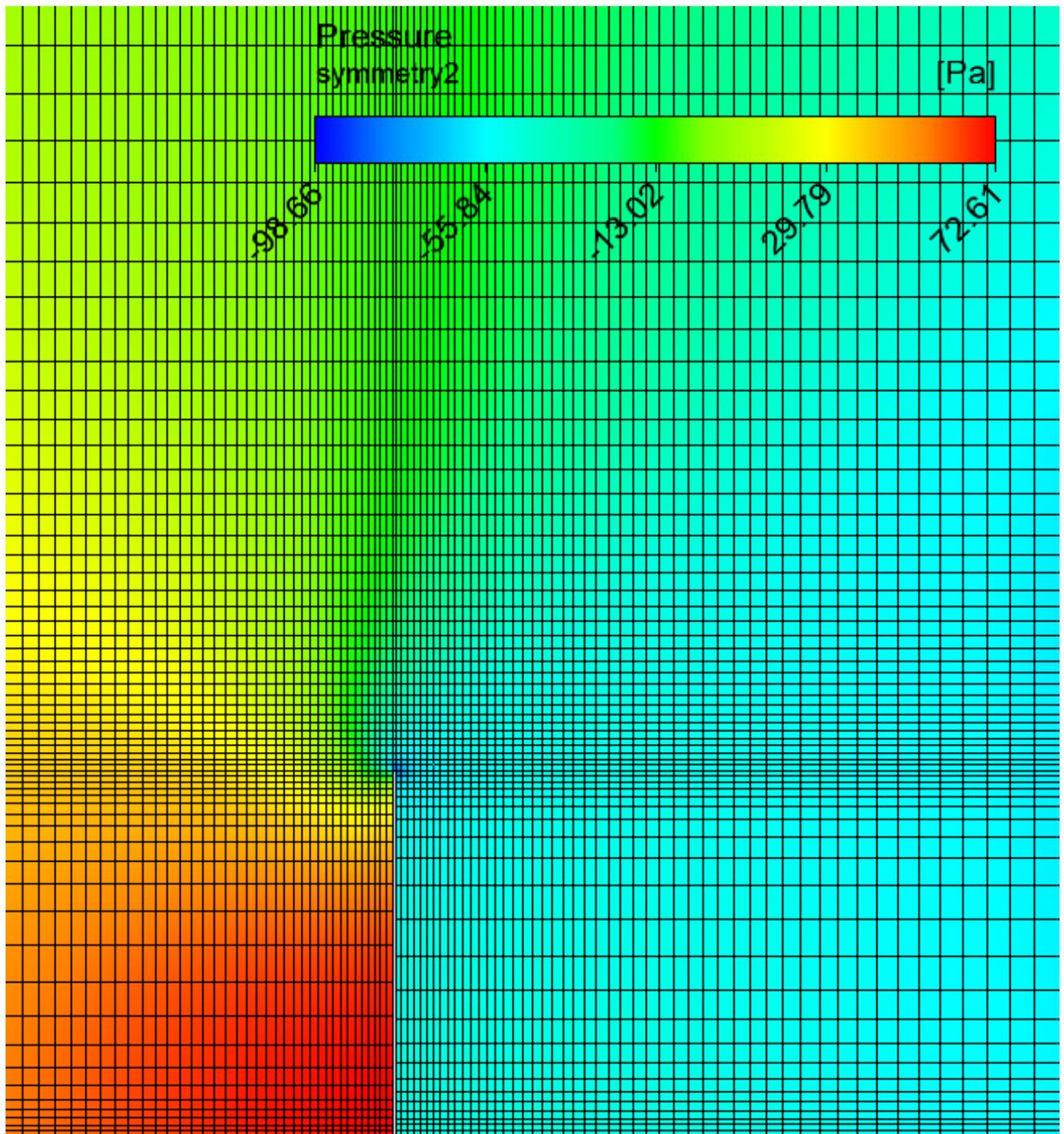


Рисунок 3.21 Изополе давления жидкости и расчетная сетка размерностью 29500 КО для пластины $h = 30$ мм в момент времени $t = 3$ с (результат односторонне связанного расчета)

Результаты численного обтекания недеформируемой пластины были использованы в качестве нагрузки для проведения расчета деформаций пластины. Величина горизонтального смещения верхнего ребра X_B составила 0.65194 м, что

на 14% больше результатов двусторонне связанного расчета для аналогичных условий (0.57204 м). Суммарная величина установившейся горизонтальной аэродинамической силы в одностороннем расчете составила 44.13 Н, что на 67% больше, чем в результате двусторонне связанного расчета, где результирующая сила равна 26.43 Н.

Такая разница объясняется тем, что двусторонний расчет учитывает «приспосабливаемость» конструкции к обтеканию жидкости, форма деформированной пластины более обтекаемая, что в данном случае приводит к заметному уменьшению нагрузки с «наветренной» стороны. Уменьшение перемещений не столь существенное в связи с геометрически нелинейными эффектами.

Естественно, в случае большей жесткости пластины ее приспособляемость к действию потока жидкости уменьшилась бы, а, следовательно, не возникло такого существенного различия результатов.

3.6. Выводы по главе 3

1. Для верификации и отработки параметров разработанной методики решения связанных задач было выбрано и успешно решено 3 блока задач, имеющих аналитическое, экспериментальное и (или) альтернативное численное подтверждение:

- расчет изотропных и ортотропных мембран в статической и динамической постановке (модальный анализ);
- моделирование обтекания цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью;
- решение связанных задач деформирования упругих пластин, взаимодействующих с окружающей их жидкостью.

2. Проведена верификация линейно-упругой ортотропной модели материала оболочки в задаче модального анализа с учетом предварительного напряжения оболочки внутренним давлением.

3. Сопоставление результатов двусторонне связанных и односторонне связанных расчетов показало на примере деформирования упругой пластины в потоке жидкости убедительно показало важность учета существенного изменения формы конструкции при ее взаимодействии с потоком жидкости.

4. Полученные автором результаты для каждого блока задач подтвердили корректность разработанного подхода к решению рассмотренных классов задач.

ГЛАВА 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ВОЗДУХООПОРНЫХ ОБОЛОЧЕК

4.1. Численное моделирование сферической воздухоопорной оболочки

4.1.1. Введение

Материалы данной главы частично изложены в статье диссертанта [61].

В основу данного раздела положен эксперимент, поставленный В.П. Поляковым, и описанный в нескольких статьях [7, 68]. Он «отличается наибольшей широтой» [32], поскольку продувалась крупномасштабная модель усеченной сферической оболочки диаметром 4.2 м и высотой 3.36 м в аэродинамической трубе с площадью поперечного сечения 264 м². Размеры оболочки сопоставимы с размерами реальных сооружений, а исследуемые скорости ветра (12-45 м/с) – с расчетными скоростями ветра в различных ветровых районах. Число Рейнольдса достигало величины 10⁷.

Помимо больших размеров модели следует отметить тот факт, что набор данных для сопоставления представлен достаточно полно: размеры оболочки, параметры материала (частично), направление раскроя, скорость потока и внутреннее давление в различных сочетаниях, перемещения точек оболочки (измеренные методом стереофотограмметрии [7] в зоне полного торможения потока), распределение аэродинамического коэффициента по поверхности оболочки.

Последняя величина исследовалась при различных величинах внутреннего давления и скоростях потока. При этом, один параметр, например, внутреннее давление, фиксировался, а другой – скорость – варьировался. Были рассмотрены случаи при величине внутреннего давления $p = 1000$ Па и скоростях потока $v = 12, 20, 30, 40$ и 45 м/с. А для скорости потока $v = 40$ м/с были получены результаты при значениях внутреннего давления $p = 500, 1000, 1500, 2000$ Па.

Переход от скорости потока к динамическому давлению q осуществляется по известной формуле:

$$q = \frac{\rho v^2}{2} \quad (4.1)$$

где $\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха при температуре 15°C ;

v – скорость потока, м/с.

На форму оболочки в потоке существенное влияние оказывает отношение избыточного давления воздуха под оболочкой p к динамическому давлению потока воздуха q :

$$\psi = \frac{p}{q} \quad (4.2)$$

При величине параметра $\psi < 1.0$ в зоне полного торможения потока на оболочке образуется одноосная область (одно из главных напряжений равно нулю) вогнутой формы, так называемая «ложка» [32]. Этот случай соответствует наибольшему искажению первоначальной формы оболочки, а образование вогнутой «ложки» можно отнести к локальной потере устойчивости [32]. Этот сценарий представляет наибольшие трудности для численного моделирования, поскольку требует наиболее детальной дискретизации как по времени, так и по поверхности оболочки, поскольку границы между плоскими конечными элементами оболочки препятствуют складкообразованию и, таким образом, вызывают увеличение ее жесткости.

В данной работе проведено сопоставление результатов при величине внутреннего давления $p = 1000 \text{ Па}$. Отметим, что при $v = 40 \text{ м/с}$ величина динамического давления составляет $q = 0.5\rho v^2 = 980 \text{ Па}$, то есть величина указанного выше параметра достигает значения $\psi \approx 1.0$.

В статьях [7, 68] указан материал оболочки – прорезиненная капроновая ткань (арт. 51-060) толщиной 0.6 мм, а также приведены модули упругости материала в двух направлениях (по основе и утку), соотношение которых было использовано для моделирования линейно-упругого ортотропного материала. Использование

указанных величин модулей упругости приводило к значительному повышению деформативности оболочки и искажению результатов.

Кроме этого в статьях не представлены геометрические параметры поддерживающей конструкции (экрана аэродинамических весов) и не описано расположение оболочки в потоке. Отсутствие указанной информации приводит к дополнительным неточностям в результатах численного моделирования.

4.1.2. Особенности использованных численных моделей

4.1.2.1. Описание расчетной модели ANSYS Fluent

Задача аэродинамики решалась в *ANSYS Fluent* с помощью метода конечных объемов (МКО), в котором расчетная область, включающая в себя пространство вокруг оболочки, разбивается на множество локальных элементов (расчетных ячеек). Для каждого локального элемента записывается система законов сохранения массы, импульса и энергии в интегральной форме, которая затем преобразуется к системе алгебраических уравнений относительно искомых величин – давления, скорости и др. в центрах расчетных ячеек [88].

На данном этапе был использован подход, базирующийся на использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (*RANS*), замкнутых с помощью той или иной полуэмпирической модели турбулентности.

Изменение формы оболочки приводит к необходимости решения нестационарной задачи, поскольку, по сути, мы имеем дело с переходным процессом. Для валидации полученных результатов необходимо большее количество экспериментальных данных (например, числа Струхала для оценки частоты срыва вихрей), которое к сожалению, не представлено в указанных статьях [7, 68].

Кроме того, основная сложность при решении нестационарной задачи заключается в том, что существенно повышаются требования к качеству расчетной

сетки, дискретизации во временной области и, как следствие этого, вычислительным ресурсам и затратам машинного времени на расчет [9]. Следует также отметить, что детальное моделирование пограничного слоя элементами малой толщины (порядка 0.1 мм) с сохранением приемлемого качества сетки не только увеличивает общий размер расчетной сетки для аэродинамического расчета, но и накладывает весьма жесткие ограничения на шаг по времени, поскольку перемещение точек оболочки не должно превышать поперечный размер первого слоя конечных объемов.

Толщина первой ячейки вблизи оболочки принималась так, чтобы минимальная величина автомодельной переменной в законе стенки-следа в первом от поверхности узле сетки $y^+ > 30$. При такой величине y^+ пограничный слой достаточно хорошо моделируется с использованием пристеночных функций [88].

Таким образом, время решения нестационарной задачи с учетом развитого вихреобразования требует на порядок больше вычислительных ресурсов и машинного времени. Поэтому было решено расчеты, нацеленные на проверку и отладку расчетной методики, производить на достаточно грубой неструктурированной (тетраэдрической) сетке (фрагмент расчетной сетки показан на рисунке 4.1, а).

Для дальнейших расчетов были построены структурированные гексаэдрические сетки различной размерности, фрагменты которых показаны на рисунке 4.1, б) и в).

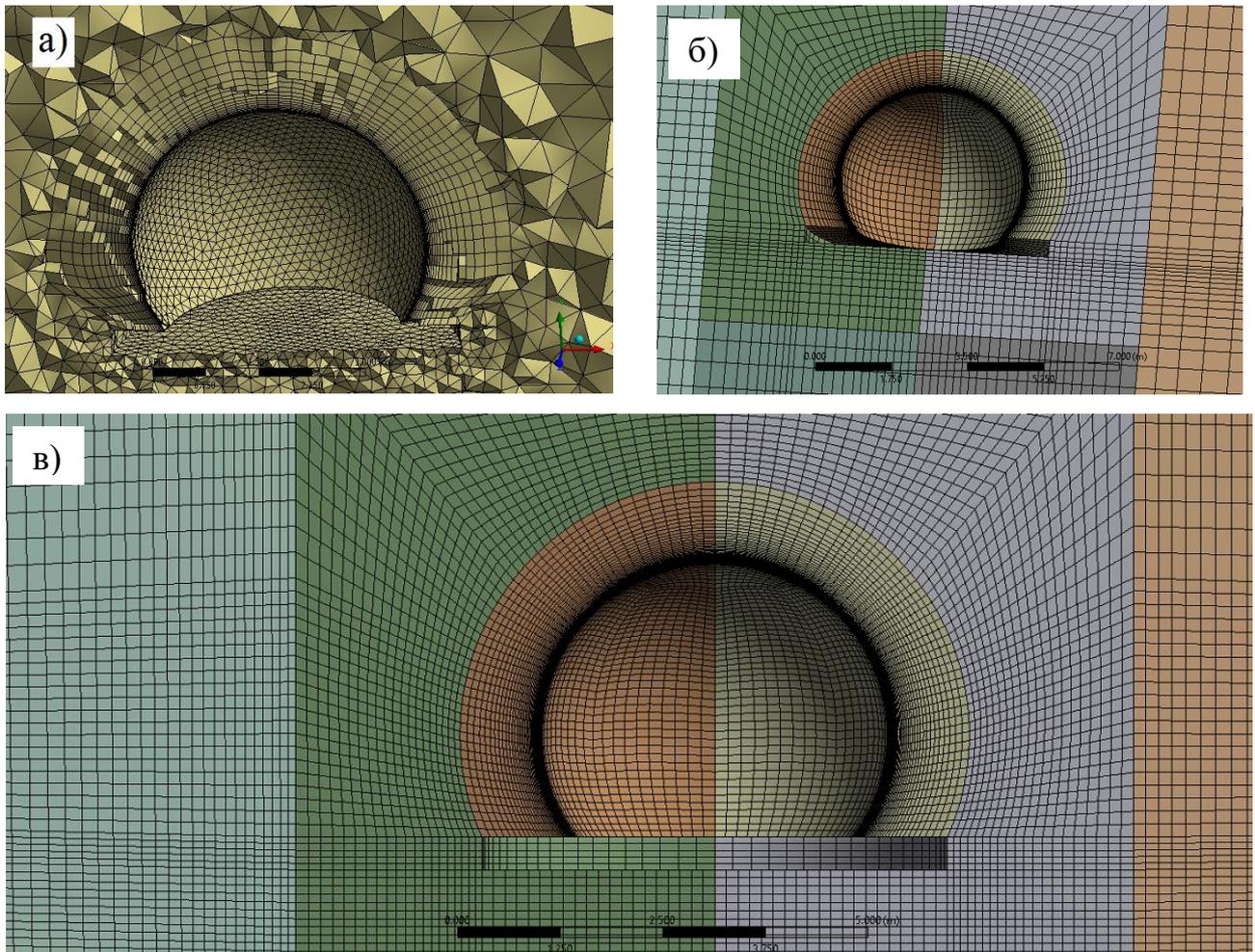


Рисунок 4.1 Расчетные сетки для окружающей оболочку воздуха:

а) неструктурированная («тетра»), ≈ 400 тыс. КО; б) структурированная, ≈ 175 тыс. КО; в) структурированная («гекса»), ≈ 812 тыс. КО

Расчетная область представляла собой прямоугольный параллелепипед, передняя и боковые грани которого (вход) отстояли от центра сферической оболочки на $5D$, а задняя грань – на $15D$, где $D = 4.2$ м – диаметр оболочки. На входе в расчётную область задавалась постоянная по высоте скорость потока, в выходном сечении было задано нулевое значение относительного статического давления, по боковым и верхней стенкам установлено условие симметрии (по рекомендациям [28]).

Поскольку проведенные расчеты имитируют испытание в аэродинамической трубе, интенсивность турбулентности во всех расчетах принималась равной 1%.

Величина линейного масштаба турбулентности была принята равной 7% от диаметра, шероховатость поверхности оболочки задавалась равной 1 мм.

При создании неструктурированной сетки размеры элементов вдоль оболочки принимались равными 0.15 м, а также создано 20 слоев призматических ячеек вблизи оболочки с толщиной первого слоя около 5 мм.

Была поставлена задача поиска наиболее подходящей полуэмпирической модели турбулентности, которая бы обеспечила наилучшее совпадение расчетных и экспериментальных результатов при неизменных остальных параметрах.

Были рассмотрены:

- 1) Однопараметрическая модель Спаларта-Аллмареса *SA* (*Spalart-Allmaras, SA*);
- 2) Двухпараметрическая модель k - ϵ ;
- 3) Двухпараметрическая модель Ментера k - ω -*SST* (*Shear Stress Transport*).

Подробное описание используемых соотношений, а также опыт применения этих моделей можно найти в литературе, например, [19, 9].

Некоторые комментарии по поводу использования модели k - ω -*SST* приводятся в п. 2.2.3.

Как известно, при численном моделировании обтекания тел с нефиксированной точкой отрыва точность отображения пристеночного вязкого слоя оказывает существенное влияние на ее положение и, следовательно, на интегральные и локальные характеристики обтекания тела [8]. При малых значениях параметра ψ (т.е. при высокой скорости потока и низком внутреннем давлении) происходит существенное искажение формы оболочки, возникают достаточно искривленные зоны, и положение точки отрыва становится привязанным к этим зонам, поэтому результаты эксперимента при более низких значениях ψ лучше согласуются с экспериментальными данными.

Для временной аппроксимации использовалась неявная схема второго порядка аппроксимации. Шаг по времени выбирался из условия устойчивости

итерационного процесса и в зависимости от скорости потока варьировался в диапазоне от 0.005 с до 0.05 с.

4.1.2.2. Описание расчетной модели ANSYS Mechanical

Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки (задача строительной механики) осуществлялось в модуле *ANSYS Mechanical* методом конечных элементов (МКЭ). Оболочка моделировалась плоскими треугольными конечными элементами (КЭ) типа *Shell181* с включенной опцией *KEYOPT(1)=1*, учитывающей только мембранную группу усилий. Последний параметр играет ключевую роль в достижении сходимости решения задачи, поскольку перемещения точек оболочки достигают весьма значительной величины (до 0.5 м). КЭ-модель оболочки показана на рисунке 4.2. Расчет производился в геометрически нелинейной постановке (активна опция «*Large Deflection*») с помощью метода Ньютона-Рафсона. Матрица демпфирования задавалась в виде суммы матрицы масс и матрицы жесткости, умноженных на коэффициенты, равные $\alpha = \beta = 0.1$. Величина демпфирования влияла на скорость затухания колебаний в переходном режиме, поэтому величина коэффициента 0.1 была определена путем тестовых расчетов.

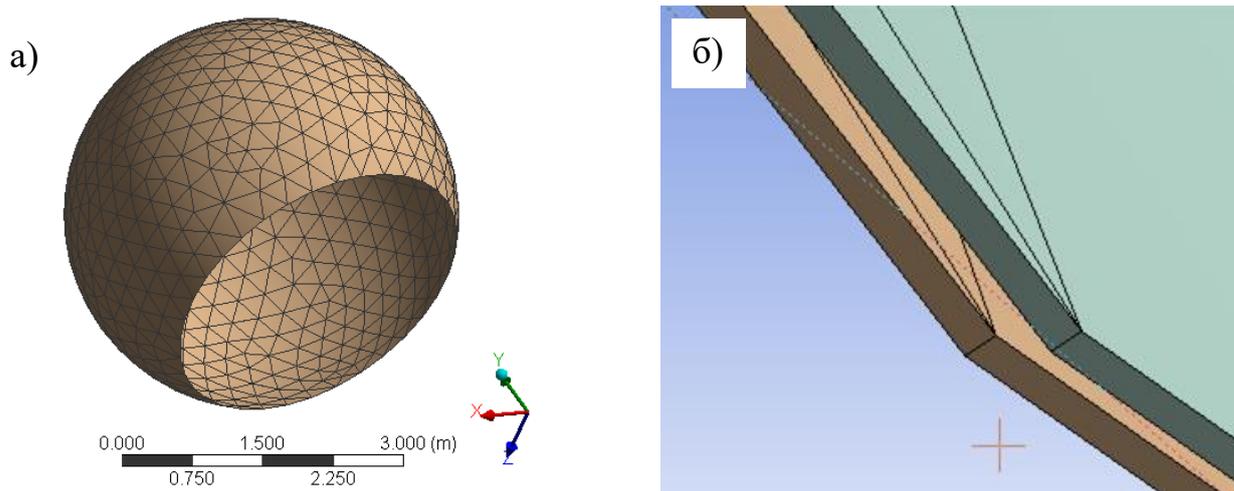


Рисунок 4.2 Конечно-элементная модель воздухоопорной оболочки:

а) общий вид (≈ 2700 КЭ); б) фрагмент вблизи края.

Избыточное давление воздуха под оболочкой, необходимое для ее существования, моделировалось в виде постоянной «следящей» нагрузки, т.е. всегда направленной по нормали к оболочке. Корректная оценка влияния избыточного давления на оболочку воздухоопорных сооружений является обязательным условием при проведения любых инженерных расчетов данных сооружений. По результатам экспериментов, давление под оболочкой изменялось незначительно [68].

В соответствии с положениями п. 2.1.2 было принято решение использовать линейно-упругую модель материала. Модули упругости в направлениях основы и утка были приняты равными 200 МПа и 185 МПа, соответственно. Эти величины подобраны в результате тестовых расчетов так, чтобы величины перемещений оболочки в наветренной зоне при скорости потока 40 м/с хорошо согласовывались с результатами эксперимента, поскольку в литературном источнике эти данные не представлены. Для задания корректной ориентации местных осей элементов, была введена дополнительная сферическая система координат, которая была использована для учета меридионального раскроя.

Следует отметить одну дополнительную особенность проводимых расчетов: поскольку толщина оболочки крайне мала по сравнению с ее размерами, то пространственное тело заменялось двухмерной сферической поверхностью, не имеющей толщины. Эта поверхность служила интерфейсом для передачи данных между решателями. Однако, в связи с ограничениями надстройки *System Coupling*, отсутствует возможность приложить внутреннее давление в виде нагрузки на поверхность, являющуюся интерфейсной. Моделирование оболочки объемными КЭ потребовало бы неоправданно сильного сгущения сетки, поскольку размеры одного элемента не должны отличаться более чем на порядок. В результате, было принято решение моделировать оболочку двумя поверхностями: внешняя является интерфейсной и служит для передачи данных при выполнении связанного расчета, а внутренняя – используется для приложения избыточного давления (см. рисунок 4.2). Для учета совместной работы между двумя оболочками устанавливалось

контактное взаимодействие типа *Bonded*, не допускающее проскальзывания или разделения. Данный тип контакта относится к линейным и рассчитывается за одну итерацию [88]. Для решения контактной задачи были использованы многоточечные кинематические ограничения (*MPC*-метод, *Multi-Point Constraint*), основанные на множителях Лагранжа. Используемые алгоритмы не привели к существенному увеличению количества итераций и времени счета.

4.1.3. Сопоставление результатов эксперимента и численного моделирования

4.1.3.1. Сопоставление аэродинамических сил

На рисунке 4.3 показаны зависимости вычисленных аэродинамических сил (лобового сопротивления F_x и подъемной силы F_y) от времени, а также результаты экспериментальных показаний шестикомпонентных аэродинамических весов (прямые линии). В статье [68] указывается, что величины аэродинамических сил практически не зависят от параметра ψ и при $v = 40$ м/с принимают следующие значения:

$$F_x = 0.42qS = 0.42 \cdot 980 \cdot 11.882 = 4890.6 \text{ Н},$$

$$F_y = 0.35qS = 0.35 \cdot 980 \cdot 11.882 = 4075.5 \text{ Н},$$

где $S = 11.882 \text{ м}^2$ – площадь миделя оболочки.

Различие в лобовом сопротивлении F_x составляет порядка 10%, а измеренная в эксперименте подъемная сила отличается почти в 2 раза от вычисленной. Подобная картина наблюдалась во всех выполненных расчетах. Объяснение выявленного различия видится в том, что аэродинамические весы были соединены с экраном, на котором была установлена оболочка. Поскольку сам экран также находился в воздушном потоке, вероятно, аэродинамические весы показывали результирующую подъемную силу, равную сумме подъемной силы действующей на оболочку (направленную вверх) и подъемную силу, действующую на нижнюю поверхность экрана (направленную вниз).

Поскольку размеры экрана неизвестны, точное моделирование системы «оболочка + экран» не представляется возможным. Однако, наличие экрана слабо сказывается на величине лобового сопротивления и распределения внешнего давления воздуха по оболочке.

Следует также обратить внимание на то факт, что для неструктурированной тетраэдрической расчетной сетки аэродинамические силы практически не колеблются, в отличие от результатов, полученных для гексаэдрических структурированных сеток. Это объясняется высокой схемной вязкостью из-за больших размеров тетраэдрических элементов, что мешает разрешению вихревых структур за оболочкой.

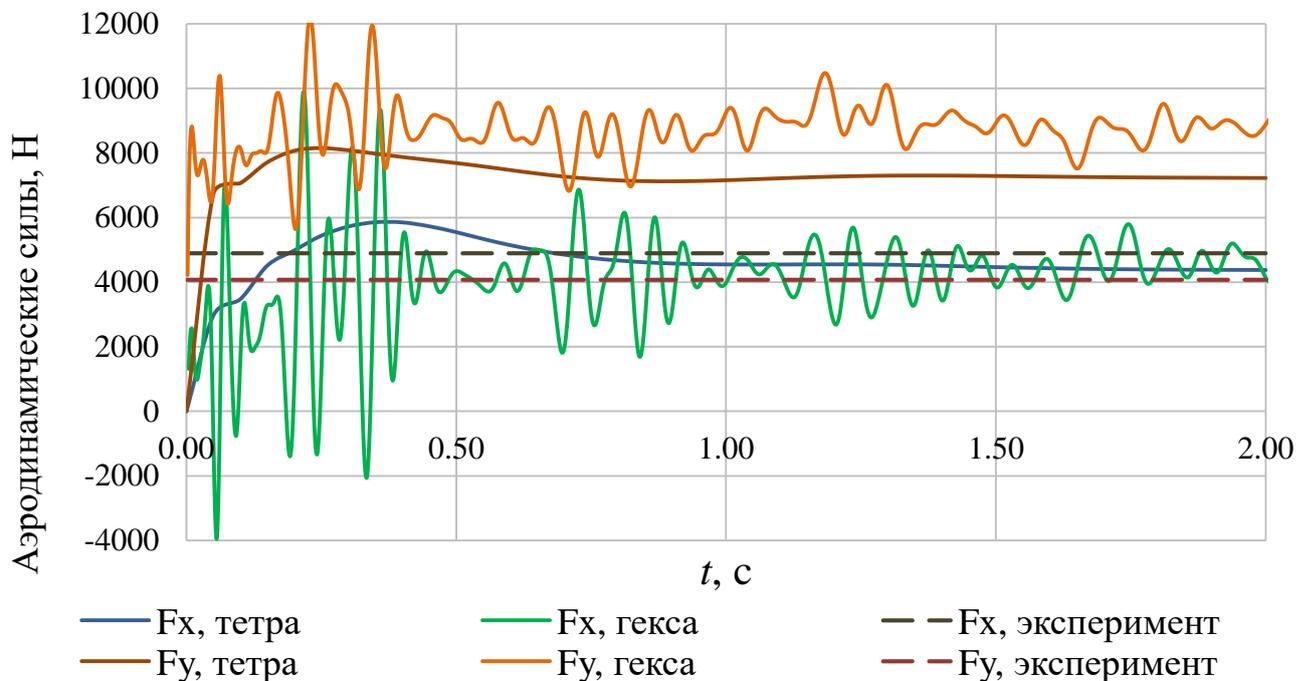


Рисунок 4.3 Сопоставление аэродинамических сил при $v = 40$ м/с

ANSYS Fluent позволяет вычислять аэродинамическую силу для конкретной поверхности (или их набора), поэтому изначально аэродинамические силы вычислялись только для оболочки (без учета экрана). Но в нескольких расчетах для проверки предложенного объяснения различия результатов аэродинамические силы были вычислены для суммарной поверхности оболочки и экрана. К сожалению, размеры экрана в статьях не указаны, поэтому его размеры задавались приблизительно. При диаметре экрана на 2 м больше диаметра основания оболочки

суммарное значение подъемной силы практически было равно нулю. Таким образом можно сделать вывод, что при некотором значении диаметра экрана, несколько превышающем диаметр основания оболочки, значение вычисленной аэродинамической подъемной силы может достигать значения, полученного в эксперименте. В связи с общей трудоемкостью проведения расчетов определение такого диаметра экрана в рамках данной работы не производилось.

4.1.3.2. Сопоставление аэродинамических коэффициентов

Отношение избыточного статического давления, действующего на оболочку, к динамическому давлению (скоростному напору) представляет собой аэродинамический коэффициент и обозначается C_p . Положительные значения C_p соответствуют давлению, направленному к центру оболочки. Например, вогнутая «ложка» на передней (наветренной) части оболочки образуется в зоне положительного аэродинамического коэффициента. Цветовая карта распределения аэродинамического коэффициента с наветренной стороны оболочки показана на рисунке 4.4.

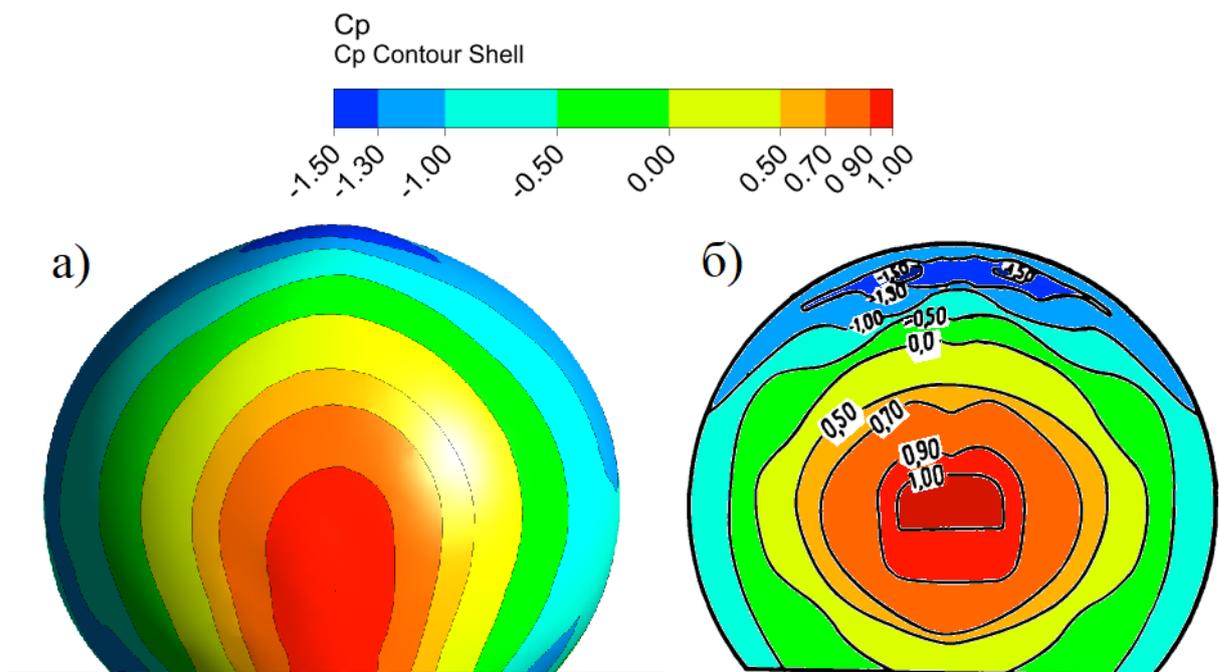


Рисунок 4.4 Распределение аэродинамического коэффициента с наветренной стороны оболочки: а) Двусторонне-сопряженный расчет диссертанта; б) Экспериментальные данные (в единой цветовой шкале)

Линия пересечения вертикальной плоскости, проходящей через центр сферы параллельно потоку и поверхности сферы, есть главный меридиан. На рисунке 4.5 показано распределение величины C_p в плоскости главного меридиана без учета (а) и с учетом (б) деформаций оболочки.

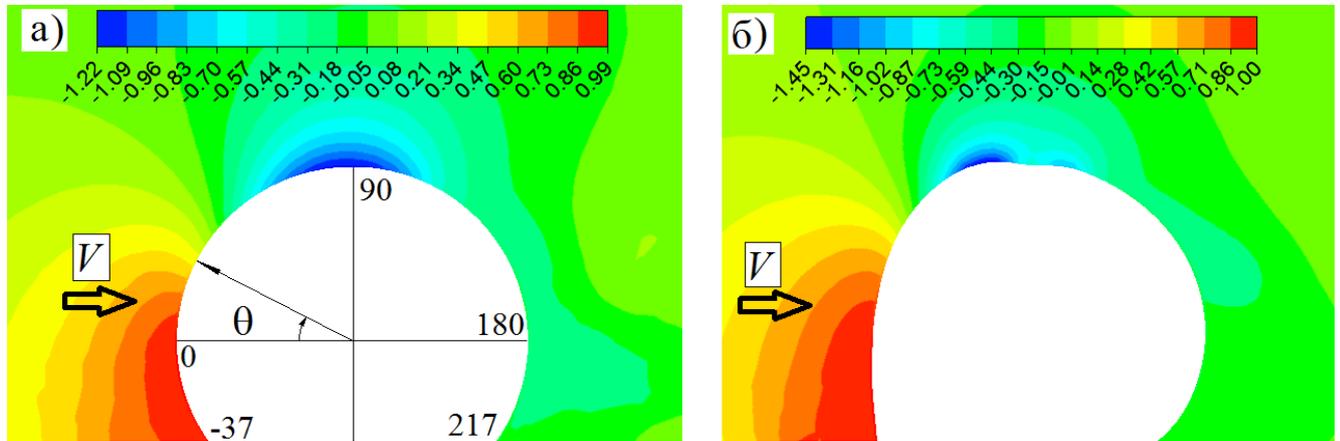


Рисунок 4.5 Распределение аэродинамического коэффициента в плоскости главного меридиана: а) Несопряженный (1-way FSI); б) Двусторонне-сопряженный расчет (2-way FSI)

На рисунке 4.5, а) также показано направление отсчета широтного угла θ , используемого для построения графиков распределения C_p по главному меридиану оболочки. Положительное направление угла θ отсчитывается по часовой стрелке от горизонтальной оси направленной навстречу потоку и проходящей через центр сферы. В нашем случае угол θ изменяется в диапазоне от -37° до 217° . На рисунках 4.6, 4.7, 4.8 показаны графики распределения C_p вдоль главного меридиана, полученные в результате эксперимента и расчетов с использованием различных полуэмпирических моделей турбулентности.

Отметим, что для скорости $v = 40$ м/с имеются экспериментальные результаты по двум сериям опытов, между ними наблюдается некоторое количественное различие.

Можно заметить, что результаты одностороннего расчета слабо изменяются в зависимости от скорости потока. В результате двусторонних расчетов минимальное значение с ростом скоростного напора C_p уменьшается от -1.23 до -

1.38 (в эксперименте от -1.16 до -1.4), а различие между результатами одностороннего и сопряженного (2-way FSI) расчета увеличивается. Результаты связанного расчета при больших скоростях ветра лучше соответствуют эксперименту, как количественно, так и качественно (заметен второй минимум в районе 100°C , который отсутствует в результатах одностороннего расчета). Причем указанные особенности соответствуют расчетам по всем моделям турбулентности. При использовании различных моделей турбулентности выявлены в основном количественные отличия в величине второго пика.

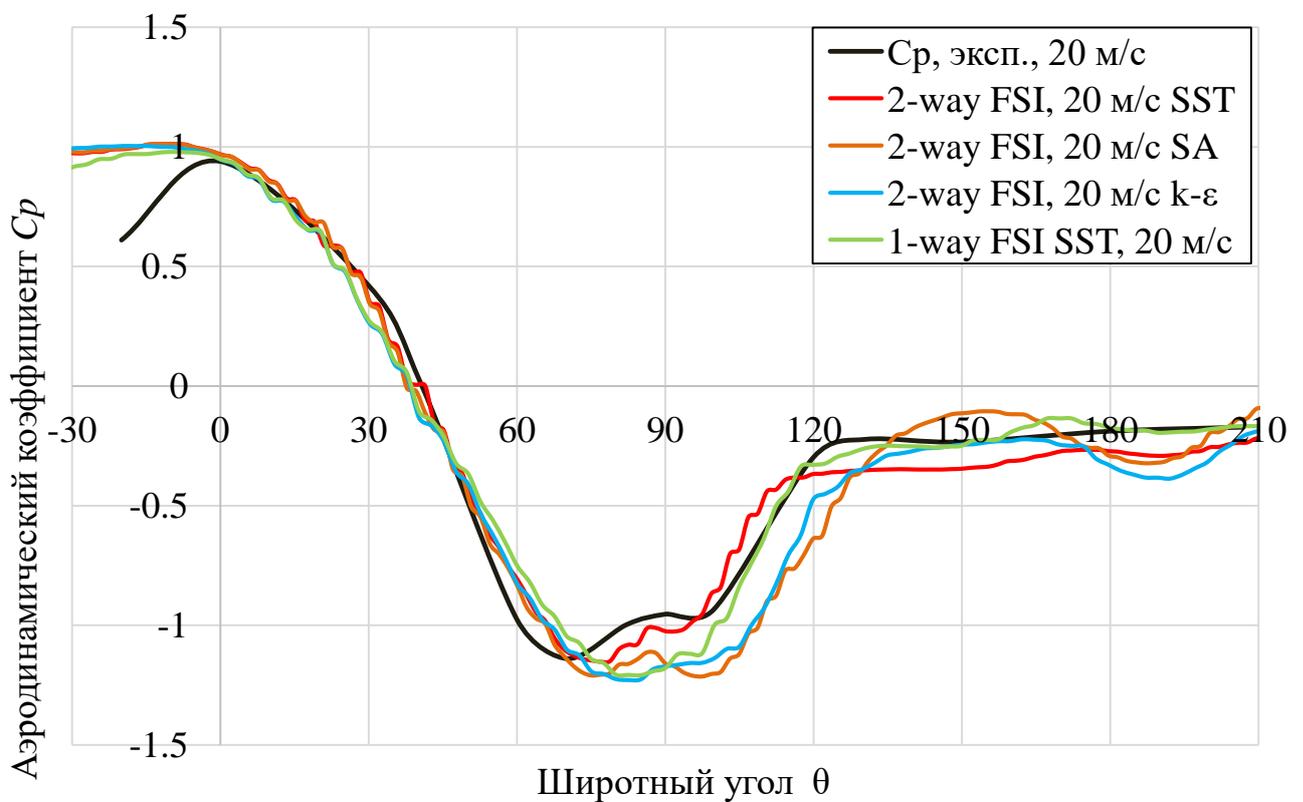


Рисунок 4.6. Распределение аэродинамического коэффициента C_p вдоль главного меридиана при $p = 1000$ Па, $v = 20$ м/с, $\psi = 4.08$

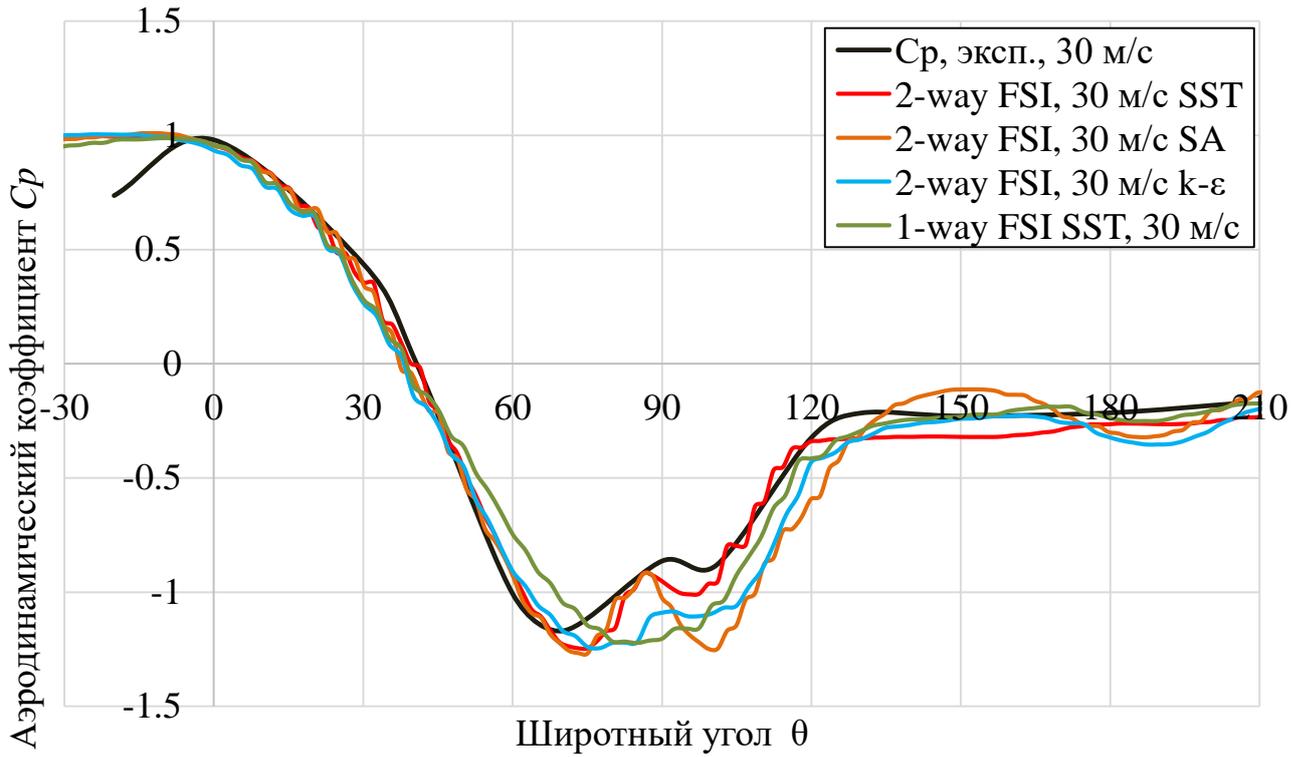


Рисунок 4.7. Распределение аэродинамического коэффициента C_p вдоль главного меридиана при $p = 1000$ Па, $v = 30$ м/с, $\psi = 1.81$

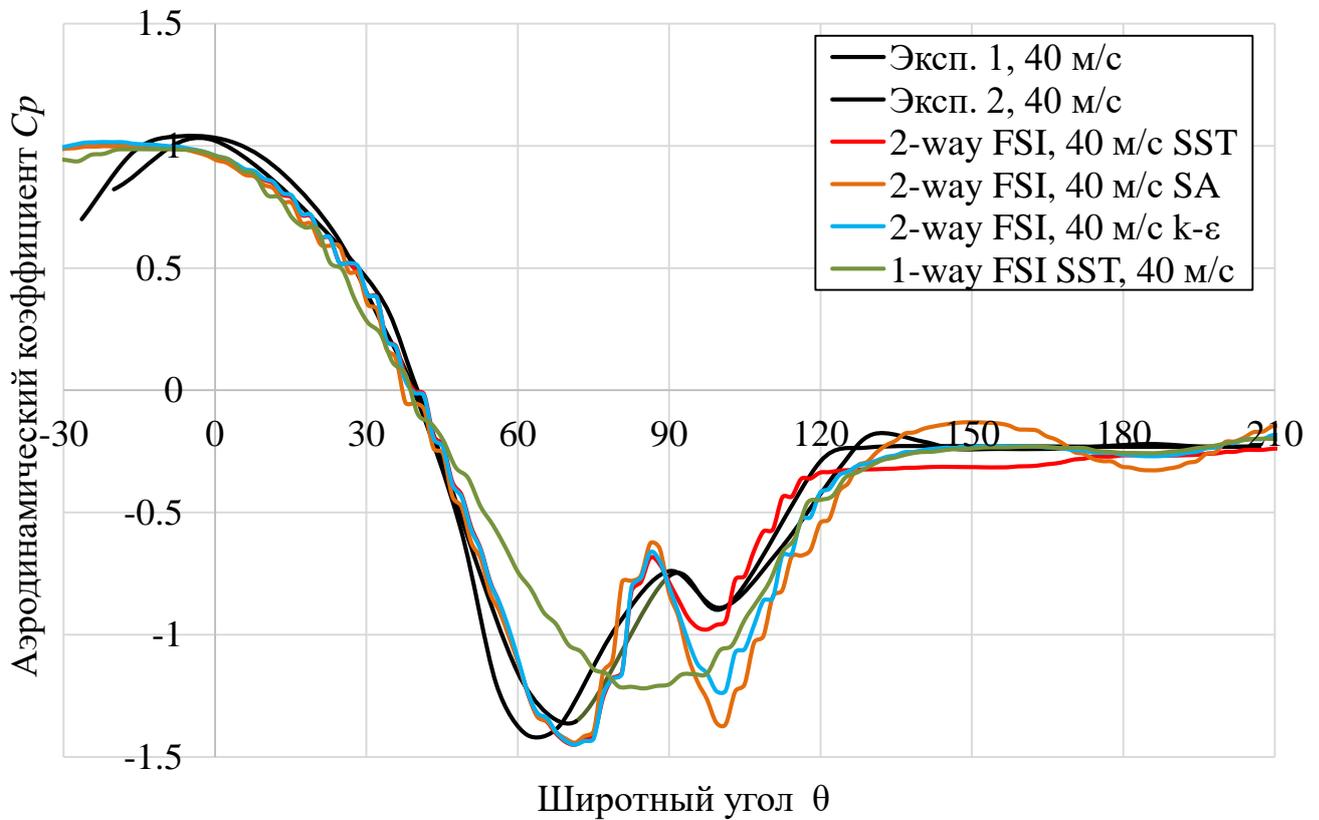


Рисунок 4.8. Распределение аэродинамического коэффициента C_p вдоль главного меридиана при $p = 1000$ Па, $v = 40$ м/с, $\psi = 1.02$

В целом, соответствие эксперименту аэродинамических коэффициентов, полученных в результате двустороннего расчета с использованием модели $k-\omega$ - SST можно считать удовлетворительным, что в целом соответствует ожиданиям, поскольку, как уже указывалось, $k-\omega$ -модели лучше предсказывают поведение потока вблизи стенки.

4.1.3.3. Сопоставление изменения формы оболочки

Перемещения оболочки в экспериментальном исследовании измерялись с помощью стереофотограмметрического метода [7]. В зоне стереоскопического видения была расположена передняя часть оболочки, где наблюдаются наибольшие прогибы оболочки (образование «ложки») при $\psi \leq 1.0$. Общий вид деформированной оболочки показан на рисунке 4.9.

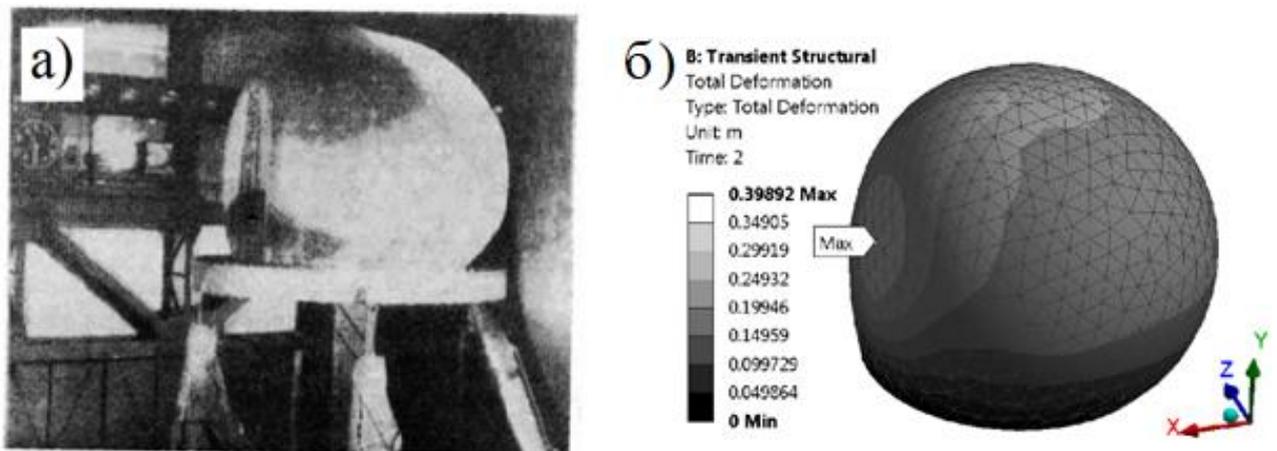


Рисунок 4.9. Изменение формы оболочки в потоке (поток направлен слева направо): а) Фотография эксперимента [7]; б) Результат сопряженного расчета

Следует отметить, что сравнение деформированной формы оболочки несколько осложнено формой представления результатов эксперимента – графики, изображающие перемещения оболочки построены для диапазонов параметра ψ , таким образом создается некая двойственность результатов на границах указанных диапазонов. Вблизи опоры оболочка выгибается слабее, чем получено в расчетах, что может объясняться особенностями конструктивного решения, крепления оболочки к экрану, которое, к сожалению, не описано. Вероятно, по причине малых

деформаций в приопорной зоне аэродинамический коэффициент имеет меньшее значение, чем получено в расчетах (см. рисунки 4.6-4.8).

Здесь следует добавить, что в результате проведенных расчетов выявлено качественное влияние ортотропии материала оболочки на деформационную картину: углубление вблизи полюса оболочки не появляется при использовании изотропной модели материала. А именно из-за этого углубления и возникает второй пик отрицательного аэродинамического коэффициента.

4.1.3.4. Выводы

Проведенные расчеты в программном комплексе *ANSYS* показали его применимость к решению задач по моделированию аэроупругого поведения воздухоопорных оболочек.

Показано, что учет деформаций оболочки приводит к изменению распределения аэродинамического коэффициента и, как следствие этого, изменению НДС оболочки.

Применение *SST*-модели показывает наилучшую согласованность результатов с экспериментальными данными среди рассмотренных полуэмпирических *RANS*-моделей турбулентности, что согласуется с данными из литературных источников. В дальнейших расчетах использована именно эта модель.

При низких значениях параметра ψ форма оболочки значительно искажается, вследствие чего положение точки отрыва потока становится более определенным. Поэтому даже на грубой сетке оно предсказывается достаточно хорошо, чем и объясняется лучшее совпадение результатов при более высоких скоростях потока.

Выявлено качественное влияние ортотропии материала оболочки на деформационную картину. Показано, что деформации оболочки, в свою очередь, существенно влияют на распределение аэродинамического коэффициента как в качественном отношении (наличие или отсутствие второго пика C_p), так и в количественном (величина первого пика).

4.2. Расчеты воздухопорной оболочки на прямоугольном плане

Объектом исследования выбрана воздухопорная оболочка на прямоугольном плане размером 20x50 м, высота оболочки в высшей точке составляет 8.6 м, радиус скругления углов оболочки 2 м. Фотография реальной воздухопорной оболочки подобной формы показана на рисунке 1.2.

В качестве материала оболочки принята линейно-упругая ортотропная модель условной технической ткани с покрытием условной толщиной 1 мм, физико-механические параметры которой приведены в таблице 4.1. Величины данных параметров не соответствуют конкретному материалу, но в целом

Таблица 4.1.

Характеристика	Величина
Плотность ρ , кг/м ³	1200
Толщина h , м	0.001
Модуль упругости в направлении нитей основы (вдоль короткой стороны) E_1 , МПа	600
Модуль упругости в направлении нитей утка (вдоль длинной стороны) E_2 , МПа	300
Модуль сдвига (по рекомендациям [120]) $G_{12} = 0.05E_1$, МПа	30
Коэффициент Пуассона ν_{12}	0.1
Коэффициент Пуассона ν_{21}	0.2

4.2.1. Определение раскройной формы оболочки

Начальная равновесная форма воздухопорной оболочки на прямоугольном плане не является «канонической» и была предварительно определена численно на основе метода *URS*, описанного в [109], с помощью программы *ixForten 4000*.

Были рассмотрены оболочки на прямоугольном плане, созданные с различной величиной параметра внутреннего давления при отыскании формы.

В первом случае высота оболочки составила 10 м, ее форма в средней части в этом случае оказывается очень близка к цилиндрической, нижние части боковой поверхности практически вертикальны. Такая форма оболочки оказалась неустойчивой при боковых нагрузках, сопоставимых по величине с внутренним давлением, поскольку в нижних зонах, где оболочка практически вертикальна, уже на первых этапах расчета наблюдается интенсивное складкообразование.

Во втором случае, при меньшем давлении при отыскании формы (максимальная высота составила 8.6 м), нижние части боковой поверхности наклонены, поэтому такая форма является более устойчивой и способна сопротивляться боковым нагрузкам, превышающим внутреннее давление.

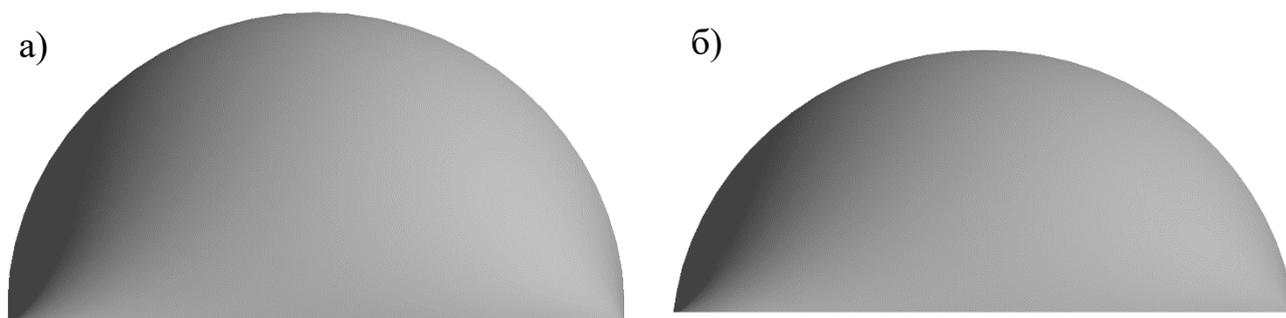


Рисунок 4.10 Сопоставление формы оболочки высотой 10 м (а) и 8.6 м (б)

Следует отметить, что полезное подоболочечное пространство во втором случае практически не уменьшилось.

4.2.2. Расчет на действие внутреннего давления

Как правило, рабочее внутреннее давление под оболочкой составляет порядка $p = 150$ Па [32], но оно может быть повышено в несколько (обычно, от двух до четырех) раз в случае неблагоприятных погодных условий – сильного ветра или снегопада.

На рисунке 4.11 для двух вариантов расчетной сетки показаны цветные карты максимальных главных растягивающих напряжений, рассчитанных при действии внутреннего избыточного давления под оболочкой $p = 150$ Па. На большей части оболочки напряжения меняются в незначительном диапазоне от 1.25 до 1.47 МПа, это говорит о том, что такую оболочку можно приближенно считать «равнонапряженной» и, следовательно, рациональной. Величины напряжений и картина их распределения практически совпадают.

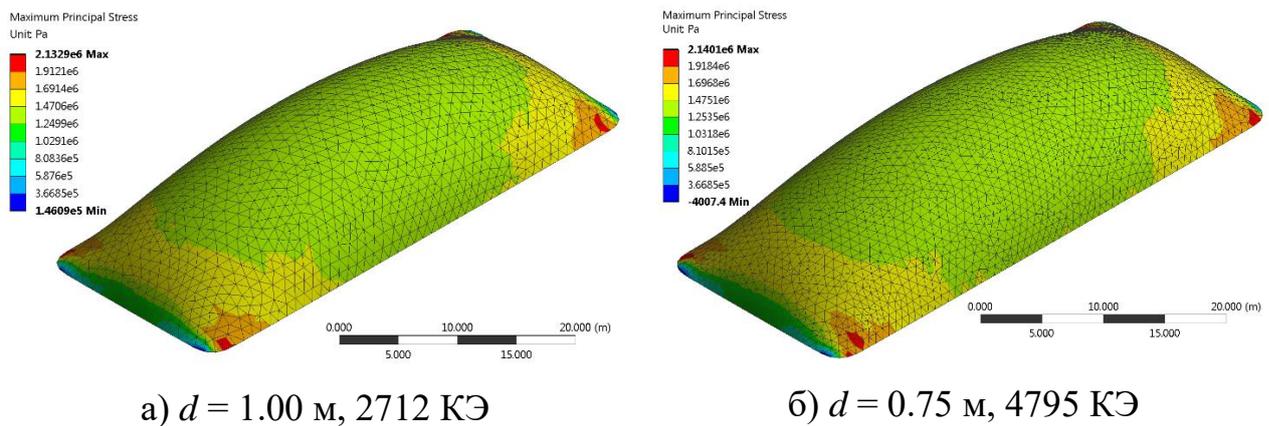


Рисунок 4.11. Максимальные главные растягивающие напряжения при действии внутреннего избыточного давления $p = 150$ Па

4.2.3. Исследование собственных частот и форм колебаний

Несмотря на то, что воздухоопорные оболочки в силу высокого демпфирования не подвержены явлениям динамической неустойчивости [120], определение собственных частот и форм колебаний является важным этапом динамического расчета [66]. Собственные частоты и формы колебаний зависят от обобщенной жесткости и распределения массы конструкции, по их изменению можно оценить, как меняется обобщенная жесткость воздухоопорной оболочки при повышении давления.

Для численного определения собственных частот и форм колебаний воздухоопорной оболочки с учетом предварительного напряжения использовалась

та же методика, по которой была решена тестовая задача, описанная в п. 3.2 данной работы.

Для определения оптимального размера конечного элемента и получения сеточной сходимости было рассмотрено три варианта расчетной сетки, параметры которых приведены в таблице 4.2. Расчетные сетки для вариантов 2 и 3 можно увидеть на рисунке 4.11.

Таблица 4.2

Модель	1	2	3
Размер КЭ, d , м	1.50	1.00	0.75
Количество КЭ	1273	2712	4795

На рисунке 4.12 показаны величины первых пяти собственных частот для моделей 1, 2 и 3. Влияние размера конечного элемента сильнее сказывается на более высоких частотах, поскольку размер полуволны становится меньше, и более грубая сетка хуже аппроксимирует деформированную поверхность оболочки.

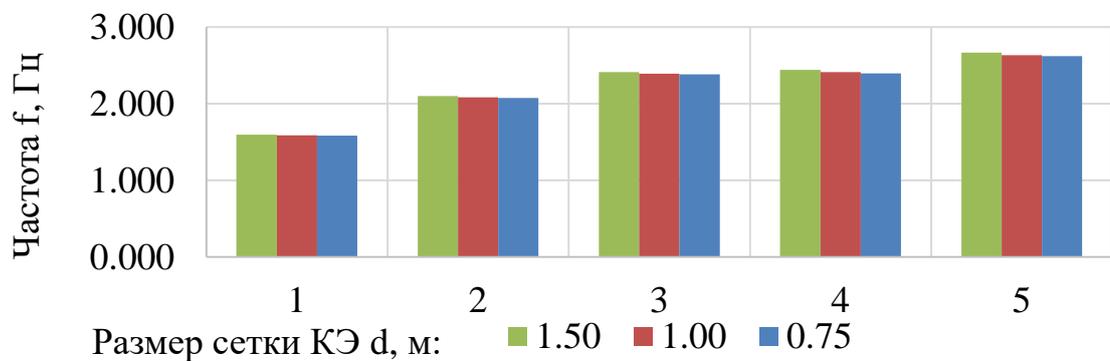


Рисунок 4.12 Сеточная сходимость решений для моделей 1, 2 и 3 (зеленый, красный и синий столбцы соответственно)

На рисунке 4.13, а)-д) показаны первые пять собственных форм колебаний воздухоопорной оболочки для модели 3 (сетка конечных элементов не показана). Формы собственных колебаний охарактеризованы парой параметров (m, n) , где m – число полуволн вдоль длинной стороны оболочки, n – число полуволн вдоль короткой стороны оболочки. На рисунке 4.13, е) для сравнения показана первая собственная форма, полученная при игнорировании дополнительной жесткости,

создаваемой внутренним избыточным давлением: поскольку мембрана не обладает жесткостью на изгиб, то первой собственной форме соответствует локальное выпучивание вблизи одного из узлов расчетной сетки. Как уже говорилось в п. 2.1, амплитуды собственных колебаний не определены и показаны условно.

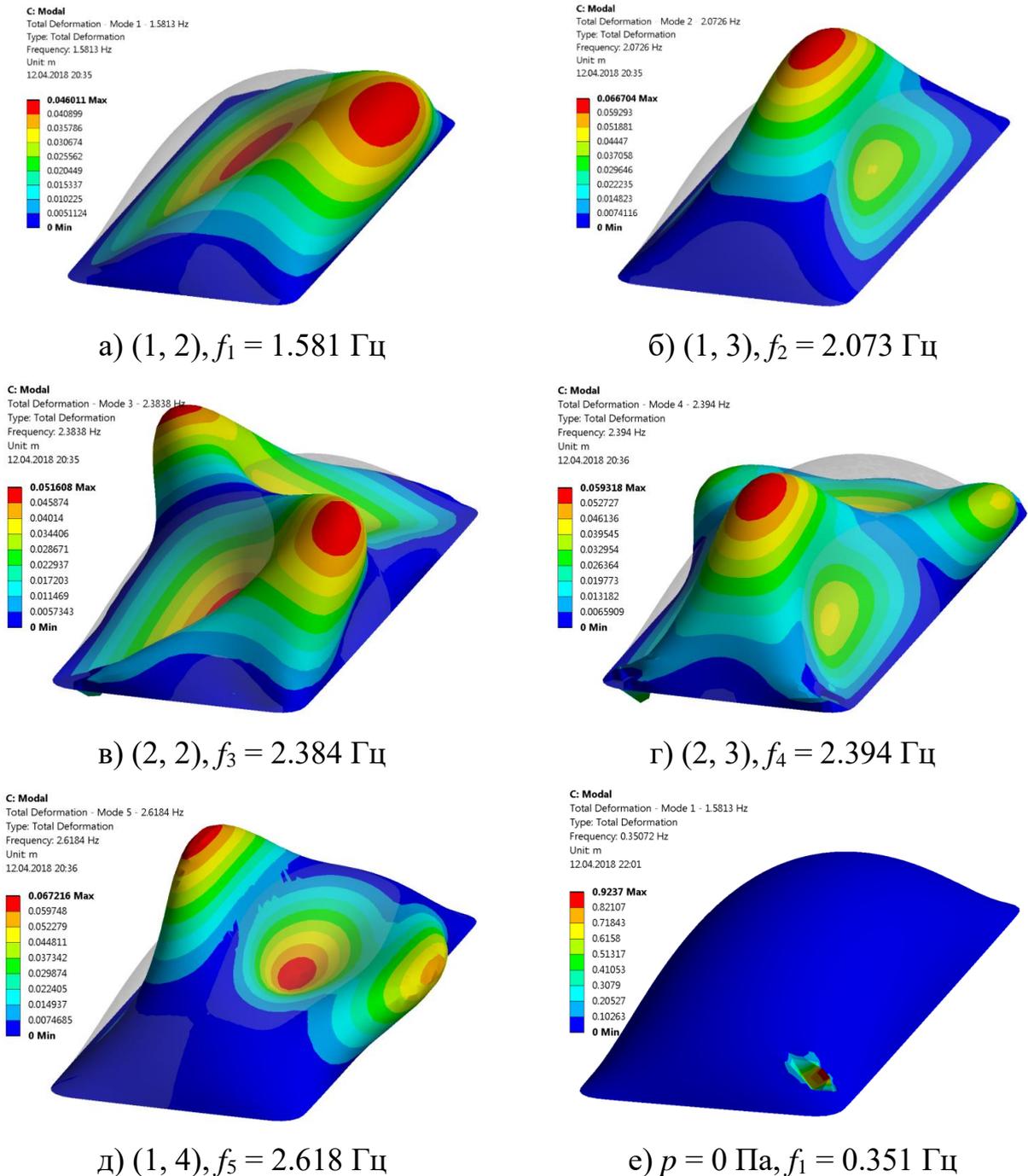
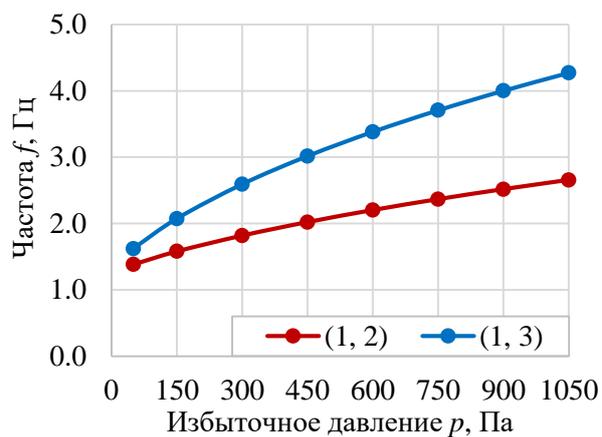


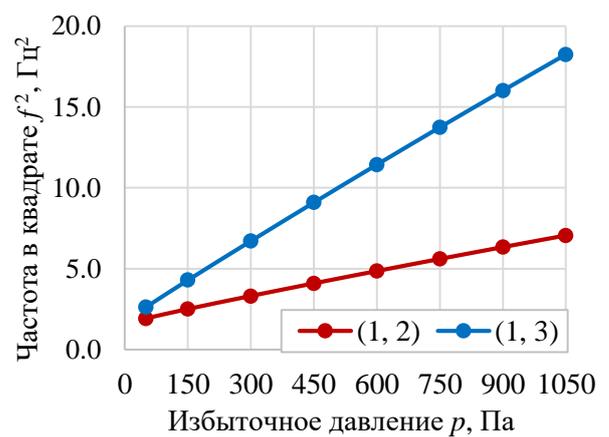
Рисунок 4.13. а-д) Собственные частоты и формы колебаний при действии внутреннего избыточного давления $p = 150$ Па для модели 3; е) первая собственная частота и форма колебаний при $p \approx 0$

На рисунке 4.14, а) показан график зависимости собственных частот (1, 2) и (1, 3) от величины избыточного давления p в диапазоне от 50 до 1050 Па. Следует отметить, что с ростом давления собственные формы трансформируются, меняется их порядок следования друг за другом. Это объясняется изменением предварительного напряженно-деформированного состояния оболочки (например, величина полных перемещений при действии внутреннего давления величиной $p = 150$ Па составляет 0.106 м, а при $p = 1050$ Па достигает уже 0.516 м). Формы колебаний (1, 2) и (1, 3) были выбраны потому, что их конфигурация оставалось неизменной в рассмотренном диапазоне избыточного давления.

В книге [80, с. 437-438] при определении собственных частот прямоугольных предварительно растянутых мембран показано, что собственные частоты прямо пропорциональны квадратному корню из растягивающего усилия. В воздухоопорных сооружениях растягивающие усилия практически прямо пропорциональны величине избыточного давления (при отсутствии других нагрузок), поэтому в указанном интервале давлений наблюдается почти линейная связь между величиной избыточного давления и квадратами собственных частот, показанная на рисунке 4.14, б).



а) Собственные частоты по формам (1, 2) и (1,3)



б) Квадраты собственных частот по формам (1, 2) и (1,3)

Рисунок 4.14. Зависимость собственных частот (а) и квадратов собственных частот (б) для форм (1, 2) и (1, 3) от величины избыточного давления p (модель 3, $d = 0.75$ м)

4.2.4. Решение задачи обтекания воздухоопорной оболочки на прямоугольном плане

4.2.4.1. Исходные данные

Расчет произведен по разработанной методике, описанной в п. 2.3. Подход к решению задачи, в целом, аналогичен подходу, использованному при численном моделировании сферической оболочки (см. п. 4.1).

В расчетах была использована геометрическая модель оболочки размерами в плане 20x50 м и высотой 8.6 м, форма которой получена в п. 4.2.1.

Следует заметить, что расчет подобной оболочки в статической несвязанной постановке рассмотрен в статье Р. Харнаха [33, с. 383-436], что позволяло качественно оценить результаты, полученные в данной работе.

В качестве материала оболочки принята линейно-упругая ортотропная модель условной технической ткани с покрытием толщиной 1 мм, физико-механические параметры которой приведены в таблице 4.1.

Рассмотрены ситуации при следующих величинах исходных параметров:

Внутреннее давление p , Па	150, 300
Скорость набегающего потока v , м/с	20, 25, 35
Угол атаки α , °	0, 15, 30

Матрица расчетных моделей для различных сочетаний параметров показана в таблице 4.3. Скоростной напор (динамическое давление) определяется по формуле (4.1), параметр ψ – по формуле (4.2).

Таблица 4.3

Шифр	α , °	v , м/с	p , Па	q , Па	ψ
1.4	15	20	150	245.0	0.61
1.5	0	20	150	245.0	0.61
1.6	30	20	150	245.0	0.61

Шифр	$\alpha, ^\circ$	$v, \text{ м/с}$	$p, \text{ Па}$	$q, \text{ Па}$	ψ
1.7	15	25	150	382.8	0.39
1.8	30	25	150	382.8	0.39
1.9	0	25	150	382.8	0.39
2.1	0	35	300	750.3	0.40
2.2	15	35	300	750.3	0.40
2.3	30	35	300	750.3	0.40
HR1.1	0	25	150	382.8	0.39
HR1.2	15	25	150	382.8	0.39
HR1.3	30	25	150	382.8	0.39
HR2.1 DES	0	25	150	382.8	0.39
2d FSI DES	0	25	150	382.8	0.39

4.2.4.2. Описание расчетных моделей ANSYS Fluent

Задача аэродинамики решалась в *ANSYS Fluent* с помощью метода конечных объемов (МКО). Был использован подход, базирующийся на использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (*RANS*), замкнутых с помощью полуэмпирической модели турбулентности Ментера *k- ω SST*, которая показала наилучшую согласованность результатов с экспериментальными данными среди рассмотренных полуэмпирических *RANS*-моделей турбулентности. Кроме того, для некоторых моделей выполнялись расчеты с использованием гибридного вихререзающего подхода *DES* в квазидвухмерной постановке.

Расчеты производились на структурированной многоблочной сетке, состоящей из шестигранных ячеек. Сгущение сетки выполнялось к поверхности оболочки и нижней части расчетной области, соответствующей поверхности земли. Толщина первой расчетной ячейки составляла 0.01 м (0.002 м в моделях HR1.1-HR1.3), что подразумевает использование пристеночных функций для моделирования пограничного вблизи оболочки. В моделях Проверка корректности

решения выполнялась для сеток различной размерности: для моделей 1.4-2.3 порядка 150000 КО, для моделей HR1.1-HR1.3 порядка 700000 КО.

Расчетная область представляла собой прямоугольный параллелепипед длиной 250 м (в направлении потока), шириной 180 м (в поперечном направлении) и высотой 60 м. Передняя грань расположена на расстоянии 80 м от оболочки, задняя – 150 м, а боковые грани – на расстоянии 65 м.

Фрагмент расчетной сетки для различных изучаемых моделей показаны на рисунке 4.15. При трехмерной постановке детализация сетки не позволяет проводить расчет за приемлемое время. При используемой конфигурации компьютера (1 персональный компьютер, оснащенный 6-ядерным процессором и 16 Гб оперативной памяти) время расчета задачи размерностью порядка 1 млн КО составляло около 140 часов для исследуемого интервала времени 20 секунд.

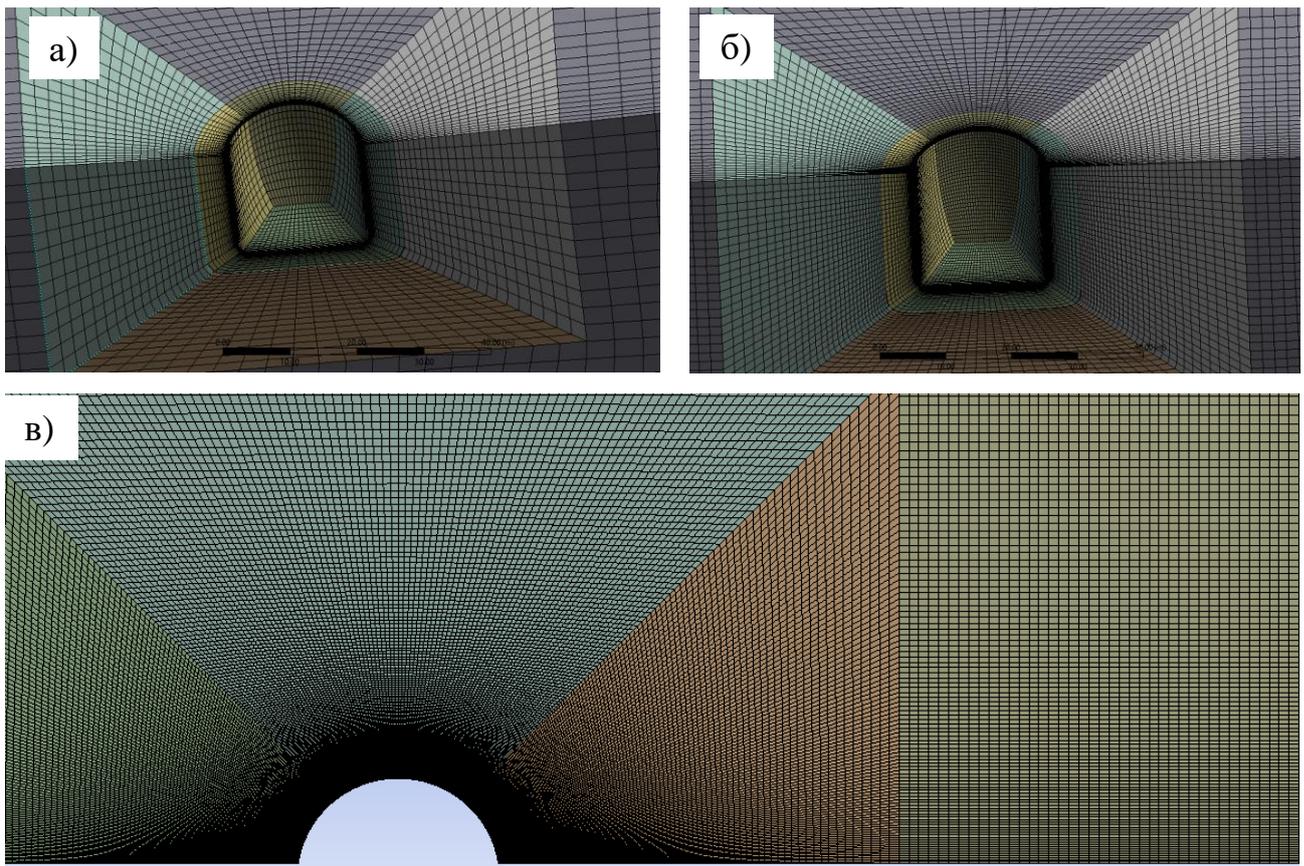


Рисунок 4.15. Фрагменты расчетной сетки для следующих моделей:

а) 1.5; б) HR1.1; в) 2d FSI DES

На входе в расчётную область задавалась постоянная по высоте скорость потока, в выходном сечении было задано нулевое значение относительного статического давления, по боковым стенкам и верхней границе установлено условие симметрии. На нижней поверхности задавалось условие стенки.

Интенсивность турбулентности во всех расчетах принималась равной 5%. Величина линейного масштаба турбулентности была принята равной 0.7 м (8% от высоты оболочки) диаметра, шероховатость поверхности оболочки задавалась равной 0.2 мм.

Толщина первой ячейки вблизи оболочки принималась так, чтобы минимальная величина автомодельной переменной в законе стенки-следа в первом от поверхности узле сетки $y^+ > 30$. При такой величине y^+ пограничный слой достаточно хорошо моделируется с использованием пристеночных функций [88].

Для временной аппроксимации использовалась неявная схема второго порядка аппроксимации. Шаг по времени выбирался из условия устойчивости итерационного процесса и в зависимости от скорости потока варьировался в диапазоне от 0.001 до 0.005 с.

4.2.4.3. Описание расчетной модели *ANSYS Mechanical*

Согласно разработанной методике, определение напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки (задача строительной механики) осуществлялось в модуле *ANSYS Mechanical* методом конечных элементов. Все расчеты производились в геометрически нелинейной постановке с помощью метода Ньютона-Рафсона. Матрица демпфирования задавалась в виде суммы матрицы жесткости, умноженной на коэффициент 0.4. Максимальный размер сетки КЭ составил 1 м, для моделирования оболочки использовано 2721 КЭ. Аналогичное разбиение показано на рисунке 4.11, а). Остальные параметры расчетной модели аналогичны приведенным в п. 4.1.2.2.

4.2.4.4. Анализ результатов численного моделирования обтекания оболочки в связанной постановке

На рисунке 4.16 показана оболочка в плане с обозначением угла скольжения α , скорости ветра v и тремя плоскостями сечений I-I, II-II и III-III, в которых проверялись результаты.

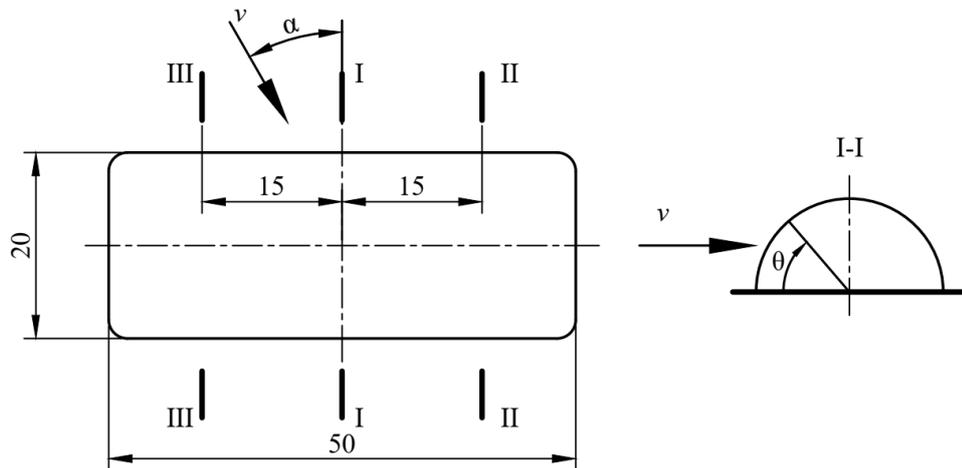


Рисунок 4.16 Принятые обозначения и схема расположения секущих плоскостей для анализа результатов. Размеры указаны в метрах.

На рисунке 4.17 приводятся графики аэродинамического коэффициента давления C_p для расчетных схем 1.4, 1.5, и 1.6 ($\psi = 0.61$) соответствующие различным углам скольжения α , а также штриховыми линиями показаны результаты продувки мягкой модели цилиндрической оболочки с цилиндрическими торцами по экспериментальным данным Х.-Ю. Нимана (см. рисунок 4.20 в [32]).

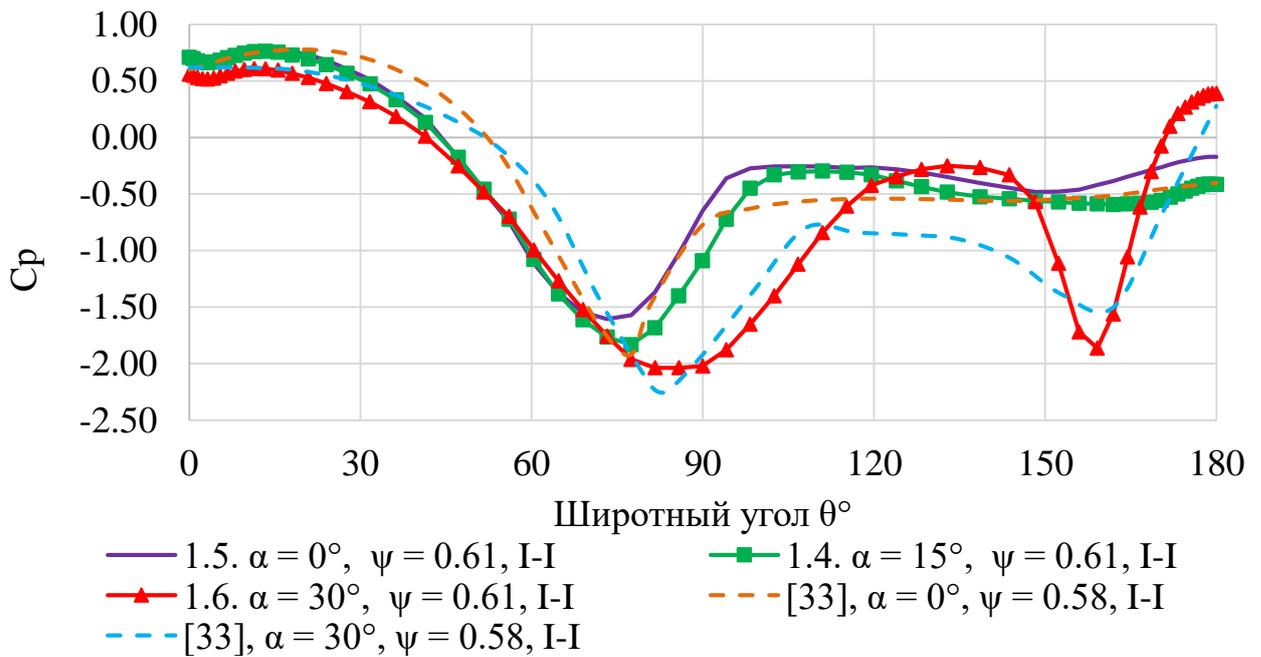


Рисунок 4.17 Аэродинамический коэффициент давления C_p в зависимости от угла скольжения α

Следует обратить внимание на то, что при угле скольжения 30° на заветренной части оболочки также наблюдается зона существенного отсоса. Это объясняется тем, что за оболочкой возникает устойчивая зона завихрения, обозначенная на рисунке 4.18 в виде линий тока.

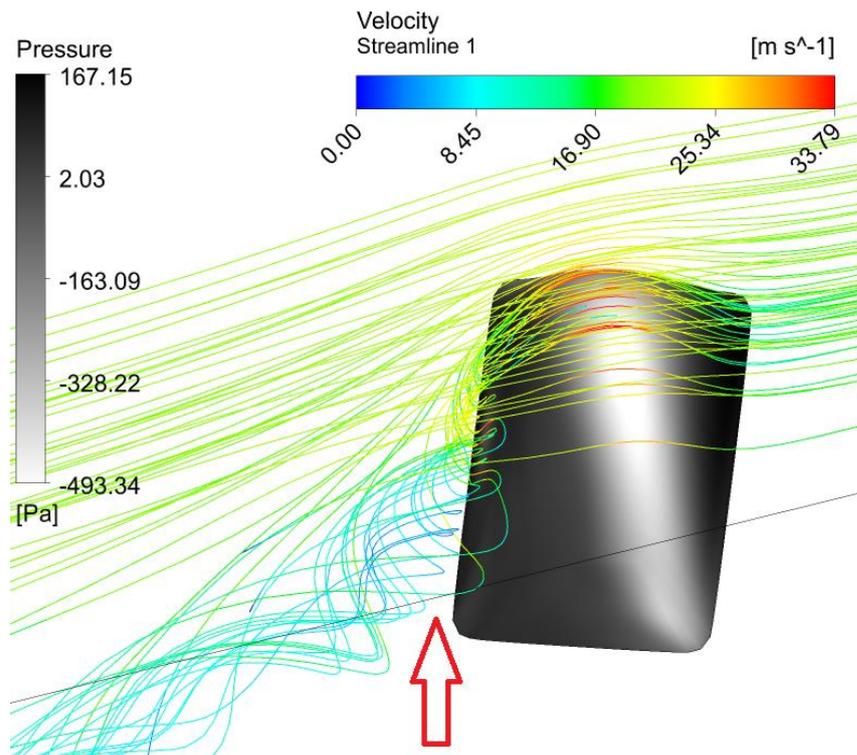


Рисунок 4.18 Линии тока за оболочкой при угле скольжения $\alpha = 30^\circ$ (модель 1.6)

В целом, картина вихреобразования за оболочкой соответствует результатам, полученным для полуцилиндрического выступа в работе [63] экспериментально и с помощью метода прямого численного моделирования (*DNS*) (см. рисунок 4.19). Следует отметить, что поскольку в указанной работе число Рейнольдса (по высоте выступа) изменялось в диапазоне от 165 до 480, а результаты, полученные диссертантом соответствуют $Re = 1.424 \cdot 10^7$, то полного совпадения результатов наблюдать не приходится.

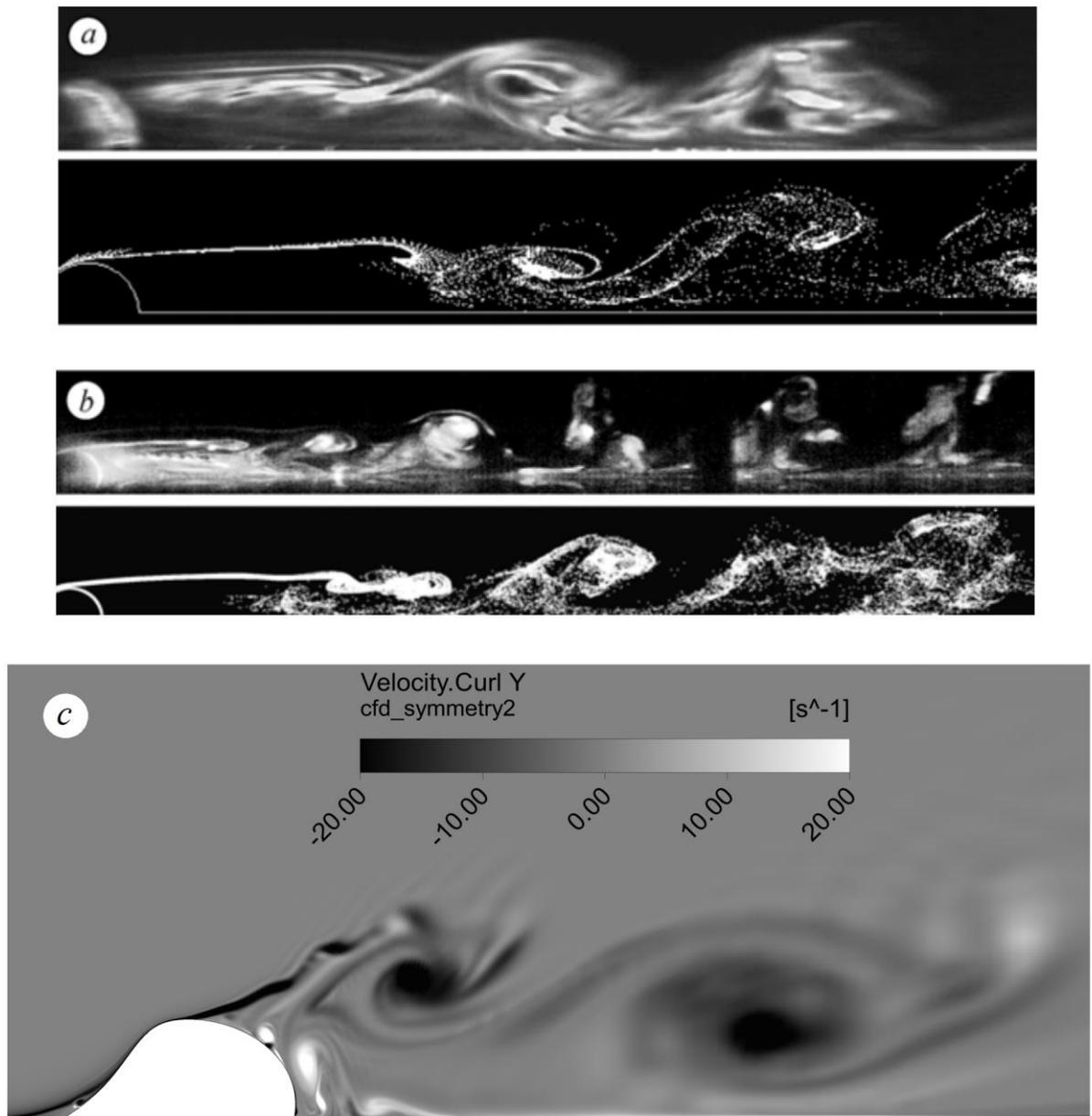


Рисунок 4.19 Сравнение картин вихреобразования: визуализации (сверху) и расчета (снизу) мгновенной картины течения [63]: $Re = 165$ (a), $Re = 480$ (b); мгновенное изополе завихренности: модель 2d *FSI* $Re = 1.424 \cdot 10^7$ (c)

На рисунке 4.20 показаны графики аэродинамического коэффициента давления C_p для оболочки, рассчитанной без учета деформаций («No FSI»), в двусторонне связанной постановке при $\psi = 0.39$ (в трехмерной и квазидвухмерной постановке), а также по данным экспериментальных исследований Л. Виттинга, представленных в [33] для цилиндрической оболочки при $\psi = 0.428$.

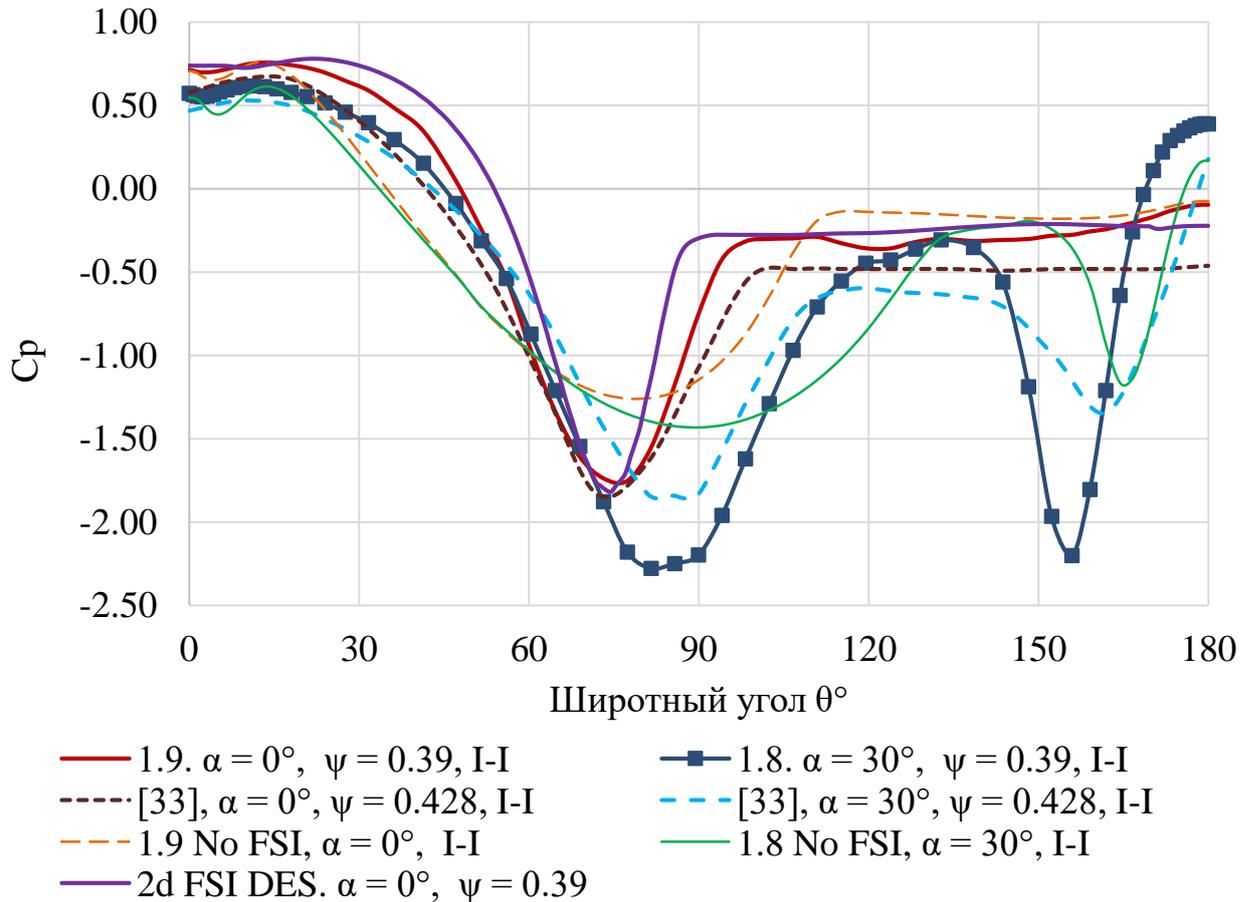


Рисунок 4.20 Аэродинамический коэффициент давления C_p

Следует отметить хорошее качественное и количественное соответствие результатов для нулевого угла скольжения, так как в среднем сечении рассчитанная автором воздухопорная оболочка имеет сечение близкое к дуге окружности. При угле скольжения $\alpha = 30^\circ$ количественное соответствие нарушается, поскольку сказывается кривизна оболочки в продольном направлении, которая отсутствует у цилиндрической оболочки. Однако, качественное соответствие сохраняется и в этом случае. На этом же графике показаны результаты для расчета обтекания

оболочки как недеформируемого тела, легко заметить очень существенное отличие этих результатов как по величине, так и по «полноте» эпюры.

Данный эффект объясняется тем, что при решении задачи в двусторонне связанной постановке учитывается увеличение кривизны оболочки из-за появления на наветренной стороне вогнутого участка и существенного отсоса в верхней части.

Для более наглядного представления результатов на рисунке 4.22 показаны карты распределения аэродинамического коэффициента давления C_p при углах скольжения $\alpha = 0^\circ$ (модель 1.9) и $\alpha = 30^\circ$ (модель 1.8) для случая $\psi = 0.39$.

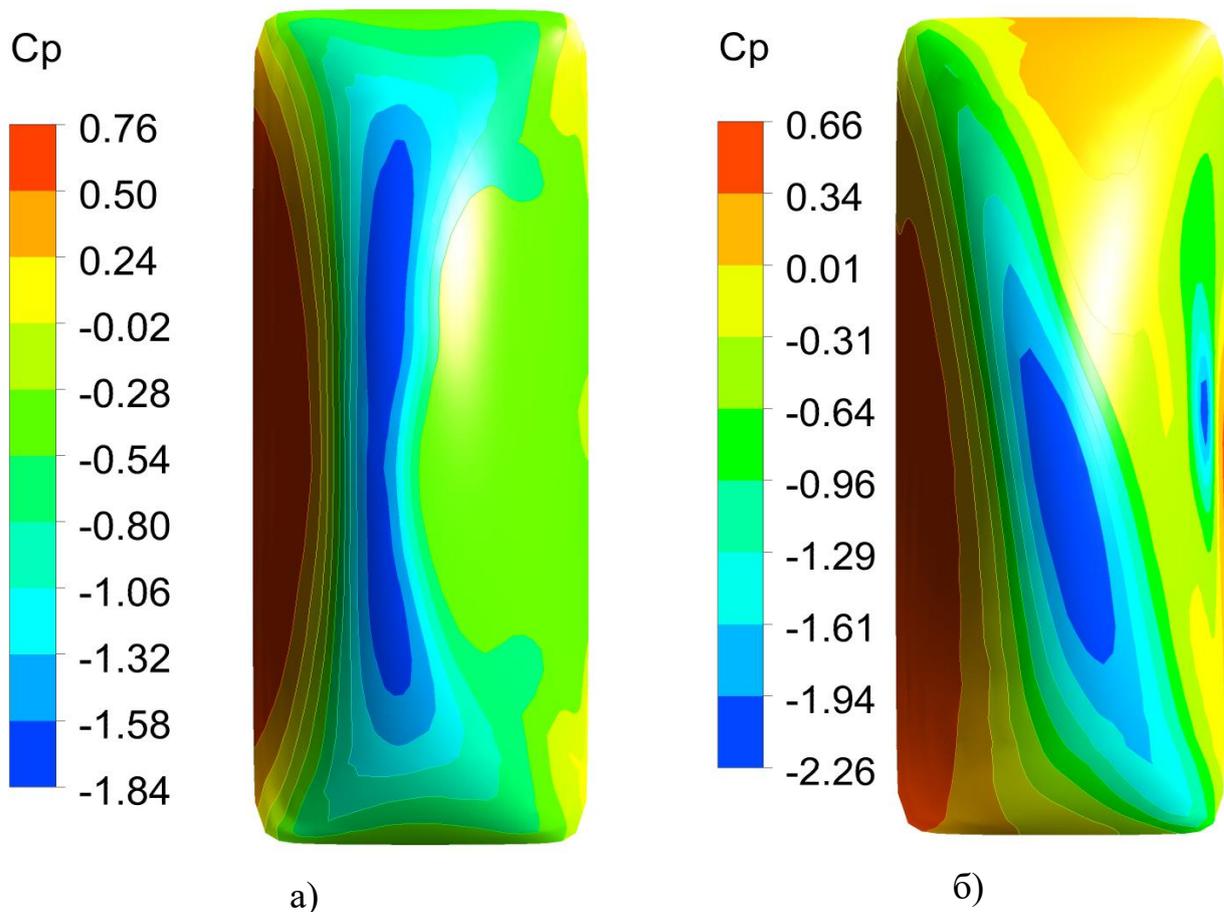


Рисунок 4.21 Карты распределения аэродинамического коэффициента C_p
а) $\alpha = 0^\circ$ (модель 1.9); б) $\alpha = 30^\circ$ (модель 1.8)

Упрощенные карты распределения аэродинамического коэффициента давления C_p могут использоваться для задания ветровых нагрузок на воздухоопорные оболочки.

Далее остановимся на результатах расчета перемещений точек оболочки. Деформированная поверхность оболочки для рассматриваемого случая ($\psi = 0.39$)

(модель 1.8) показана на рисунке 4.22. Заметно образование складок (показаны стрелкой), поскольку внутреннего давления недостаточно для стабилизации формы оболочки, а величина горизонтальных перемещений достигает величины 1.27 м.

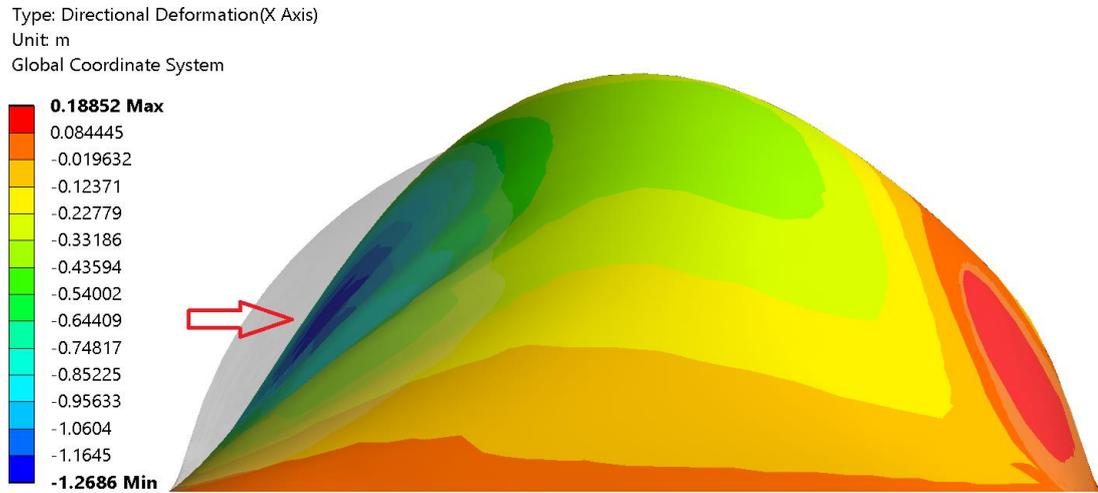


Рисунок 4.22 Карта горизонтальных перемещений оболочки, нанесенная на деформированную поверхность оболочки (в истинном масштабе), $\alpha = 30^\circ$, $\psi = 0.39$ (модель 1.8). Серым цветом обозначена исходная поверхность.

Ниже, на рисунке 4.23 показана карта горизонтальных перемещений, нанесенная на деформированную поверхность оболочки для случая $\psi = 0.61$ (модель 1.6).

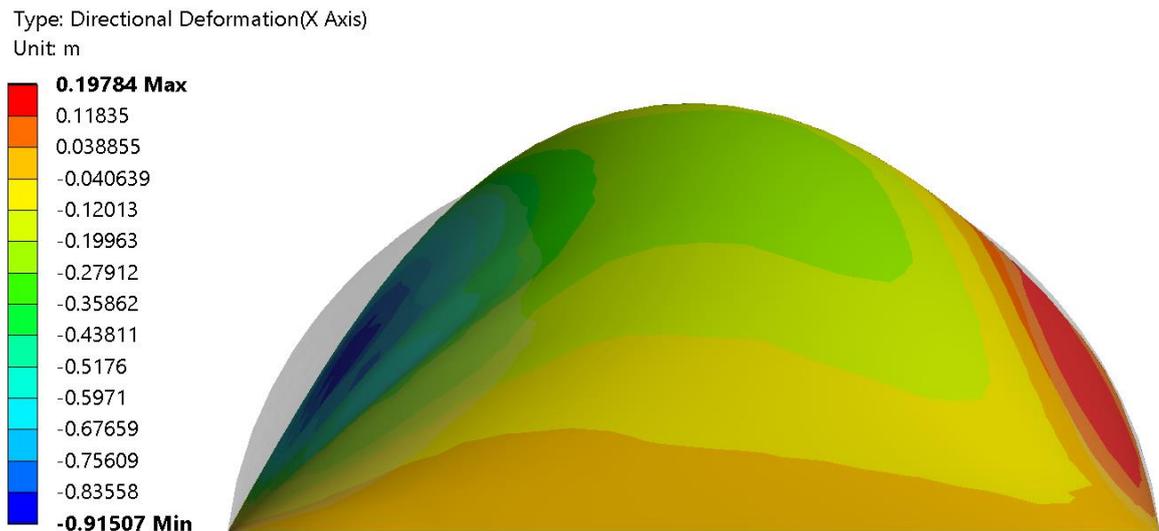


Рисунок 4.23 Карта горизонтальных перемещений оболочки, нанесенная на деформированную поверхность оболочки (в истинном масштабе), $\alpha = 30^\circ$, $\psi = 0.61$ (модель 1.6). Серым цветом обозначена исходная поверхность

На рисунке 4.24 показаны графики аэродинамического коэффициента давления C_p при нулевом угле скольжения для различных значений параметра ψ .

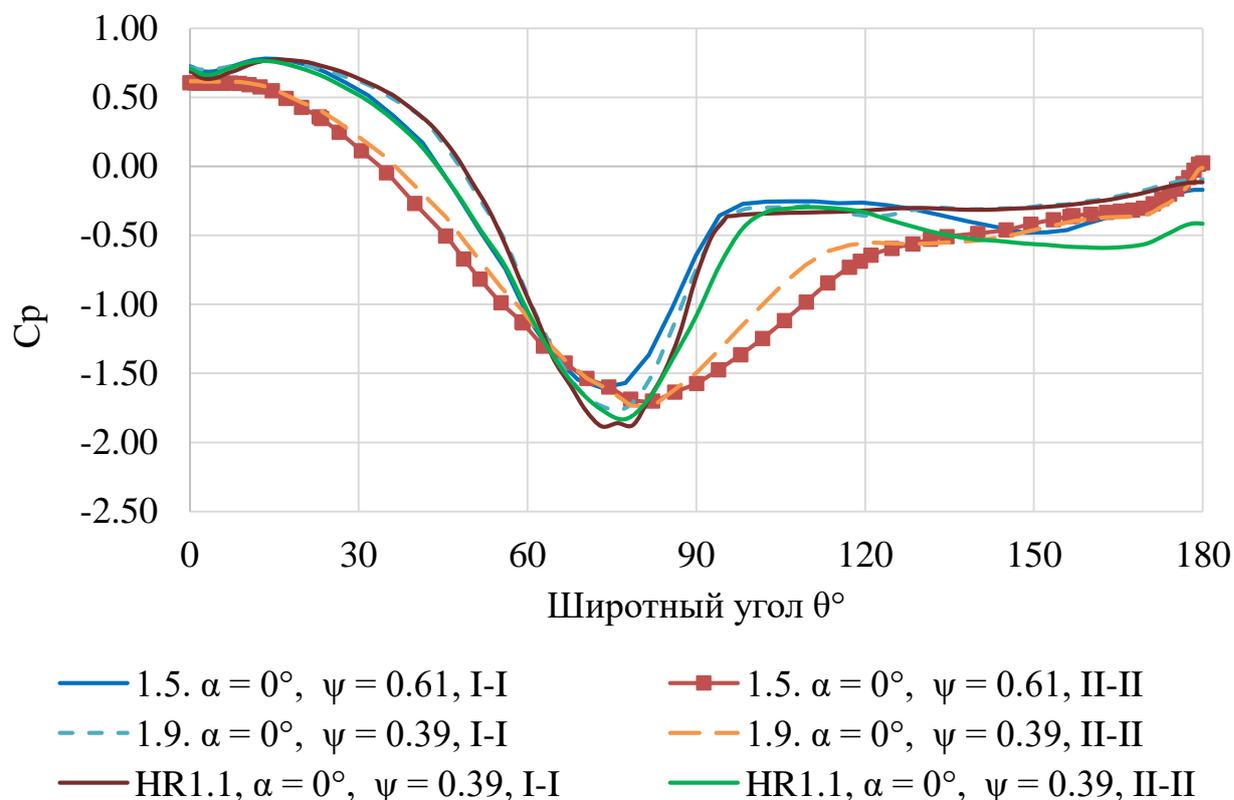


Рисунок 4.24 Аэродинамический коэффициент давления C_p при нулевом угле скольжения для различных значений параметра ψ для сечений I-I и II-II

Наблюдается аналогичный эффект, вызванный увеличением кривизны оболочки вследствие деформации. Деформированная поверхность оболочки для случая $\psi = 0.39$ (модель 1.9) при $\alpha = 0^\circ$ показана на рисунке 4.25.

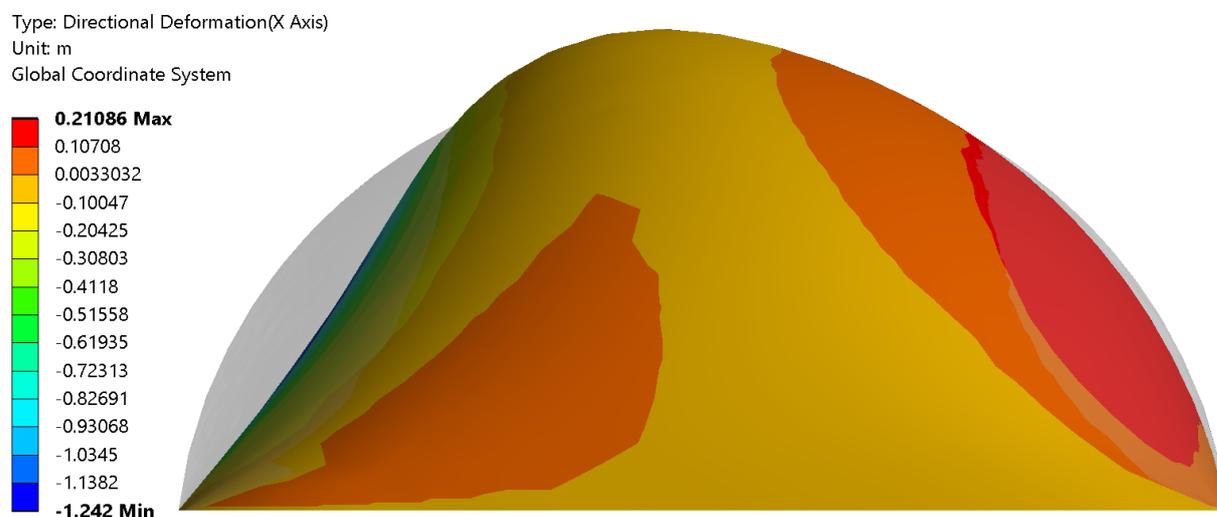


Рисунок 4.25 Деформированная поверхность оболочки, $\psi = 0.39$ (модель 1.9)

Таким образом можно сделать вывод, что наибольшие горизонтальные перемещения возникают в оболочке под действием поперечной ветровой нагрузки при ненулевом угле скольжения, что не соответствует общепринятым понятиям. Следовательно, проведение расчетов оболочек на действие ветра при ненулевом угле скольжения следует добавить в рекомендации по расчету. Кроме того, с целью повышения жесткости оболочки и избегания складкообразования на поверхности рекомендуется обеспечить повышение давления под оболочкой до величины не ниже $0.6q$.

4.2.4.5. Упрощенные методики для оценки горизонтальных перемещений воздухоопорных оболочек в потоке воздуха

Поскольку в конце динамического расчета при стационарном обтекании колебания оболочки затухают, то в качестве упрощенного подхода для анализа аэроупругих перемещений оболочки можно предложить произвести расчет оболочки на действие внешней нагрузки, соответствующей картине распределения давления, полученной в результате двусторонне связанного расчета. Упрощение состоит в том, что расчет производится в несвязанной постановке. Результаты расчета горизонтальных перемещений для этого случая показаны на рисунке 4.26. Можно заметить, что максимальное перемещение составляет 1.31 м, что отличается от результатов расчета в связанной постановке на 5.4%, то есть с удовлетворительной точностью.

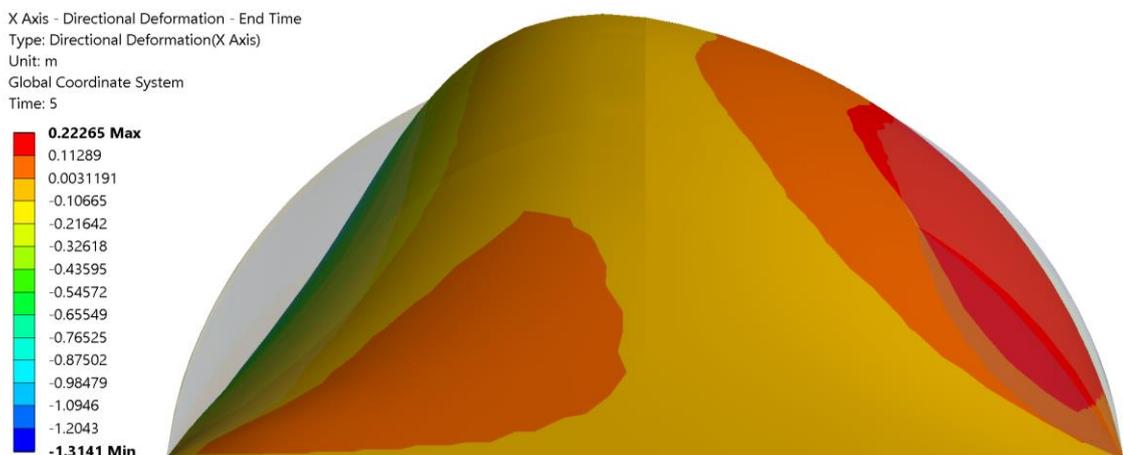


Рисунок 4.26. Деформированная поверхность оболочки для случая $\psi = 0.39$ после расчета в упрощенной постановке

В справочнике [85] приводится упрощенная формула (11.94) для определения горизонтального прогиба цилиндрической оболочки при «небольших скоростях ветра» (к сожалению, более точно область применимости указанной формулы не указана):

$$f = \frac{1}{3} \frac{q}{\Delta p} r, \quad (11.94)$$

где q – скоростной напор ветра;

Δp – избыточное давление под оболочкой;

r – радиус оболочки.

С учетом обозначений, принятых в данной работе $\left(\psi = \frac{\Delta p}{q} \right)$ перепишем формулу в виде:

$$f = \frac{1}{3} \frac{r}{\psi} \quad (4.3)$$

Однако, расчеты по данной формуле для $\psi \leq 1.0$ дают существенно завышенные результаты:

$$\text{при } \psi = 0.39, f = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{0.39} = 8.54 \text{ м}; \quad \text{при } \psi = 0.61, f = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{0.61} = 4.46 \text{ м}.$$

Что представляется физически невозможным и значительно превышает результаты, полученные в данной работе.

Предлагается для инженерных расчетов сохранить общую структуру формулы, но записать ее в виде:

$$f = k \frac{q}{\Delta p} r, \quad (4.4)$$

где k – коэффициент пропорциональности, определяемый по результатам расчетов;

r – средний радиус кривизны сечения I-I (см. рисунок 4.16) определяемый для начального состояния воздухоопорной оболочки, м.

f – горизонтальное смещение оболочки после установления стационарного режима обтекания, м.

Поскольку учет ветровых порывов, окружающей застройки, снижения модуля упругости ткани в связи со старением, а также других факторов при численном анализе деформирования воздухоопорных оболочек весьма затруднен, а между величиной и законом распределения нагрузки, величиной избыточного давления и перемещениями оболочки имеется весьма сложная зависимость, то представляются весьма разумными рекомендации нормативного документа [105] располагать твердые предметы на расстоянии вдвое превышающем величину расчетных перемещений. Другими словами, вводится дополнительный коэффициент запаса $K = 2$ к величине расчетных максимальных перемещений для снижения возможных неблагоприятного влияния факторов, неучтенных в расчете.

Результаты определения максимальных горизонтальных смещений в результате многовариантных расчетов оболочки на прямоугольном плане размером 20x50 м в двусторонне связанной постановке для различных комбинаций внутреннего давления и скоростного напора ветра показаны в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Шифр	$\alpha, ^\circ$	$v, \text{ м/с}$	$p, \text{ Па}$	$q, \text{ Па}$	ψ	$f, \text{ м}$	k
1.4	15	20	150	245.0	0.61	0.923	0.057
1.5	0	20	150	245.0	0.61	0.862	0.053
1.6	30	20	150	245.0	0.61	0.915	0.056
1.7	15	25	150	382.8	0.39	1.3228	0.052
1.8	30	25	150	382.8	0.39	1.2686	0.050
1.9	0	25	150	382.8	0.39	1.2420	0.049
2.1	0	35	300	750.3	0.40	1.2589	0.050
2.2	15	35	300	750.3	0.40	1.3339	0.053
2.3	30	35	300	750.3	0.40	1.3691	0.055
HR1.1	0	25	150	382.8	0.39	1.2017	0.047
HR1.2	15	25	150	382.8	0.39	1.2873	0.050
HR1.3	30	25	150	382.8	0.39	1.3691	0.054
HR2.1 DES	0	25	150	382.8	0.39	1.2085	0.047

Следовательно, несколько в запас, можно принять величину $k = 0.06$ и производить предварительную инженерную оценку горизонтальных прогибов оболочки на прямоугольном плане по формуле:

$$f = 0.06 \frac{q}{\Delta p} r. \quad (4.5)$$

4.2.4.6. Сопоставление напряжений в воздухоопорных оболочках при различных углах скольжения

Оценку прочности материала в своде правил по проектированию строительных тентовых конструкций предлагается проводить отдельно для направления основы и утка по формулам (1) и (2) [79]:

$$\delta_{\max,o} \leq R_{p,o}, \quad (1)$$

$$\delta_{\max,y} \leq R_{p,y}, \quad (2)$$

где $\delta_{\max,o}$ и $\delta_{\max,y}$ – максимальные напряжения в мягкой оболочке по основе и утку соответственно;

$R_{p,o}$ и $R_{p,y}$ – расчетные сопротивления при растяжении по основе и утку соответственно.

Следует заметить, что в виду малых толщин тентовых материалов мягких оболочек КСТ все технические характеристики принято относить не к площади сечения, а к ширине участка на поверхности. Однако, при численных расчетах от нормальных растягивающих напряжений σ можно перейти к растягивающему погонному усилию T путем умножения напряжения на толщину оболочки, которая полагается в расчете неизменной.

Таким образом, можно сопоставить не погонные растягивающие усилия, напряжения в направлениях основы и утка, возникающие в оболочке при изменении угла скольжения и неизменных остальных параметрах. В литературе [33] имеются указания, что при угле скольжения равном 30° максимальные

напряжения в материале наибольшие. Расчеты показали, что величина напряжений при ненулевом угле скольжения отличается в большую сторону:

в направлении нитей утка (вдоль длинной стороны оболочки) – на 6% (6.76 МПа против 6.36 МПа);

в направлении нитей основы (вдоль короткой стороны) – на 20% в большую сторону (8.74 МПа против 7.31 МПа).

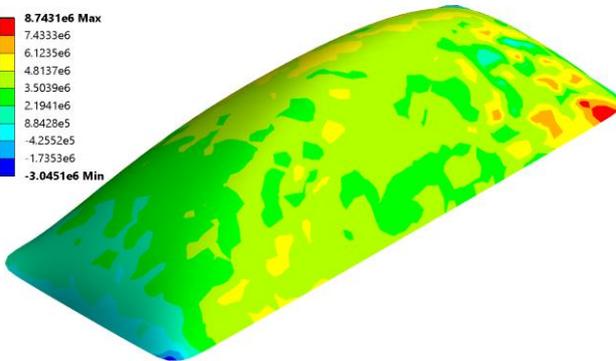
Карты распределения напряжений показаны на рисунке 4.27.

а) 1.8. $\alpha = 30^\circ$, по основе

б) 1.9. $\alpha = 0^\circ$, по основе

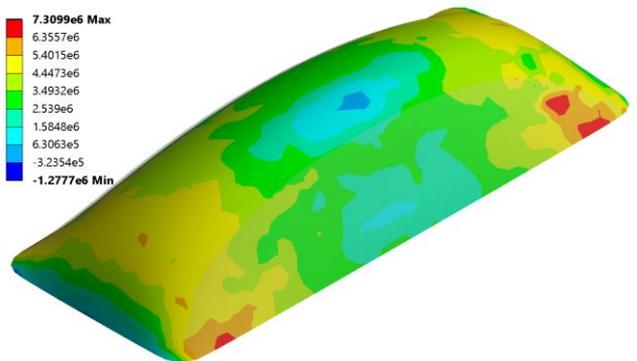
Unit: Pa
Solution Coordinate System

8.7431e6 Max
7.4333e6
6.1235e6
4.8137e6
3.5039e6
2.1941e6
8.8428e5
-4.2552e5
-1.7353e6
-3.0451e6 Min



Unit: Pa
Solution Coordinate System

7.3099e6 Max
6.3557e6
5.4015e6
4.4473e6
3.4932e6
2.539e6
1.5848e6
6.3063e5
-3.2354e5
-1.2777e6 Min

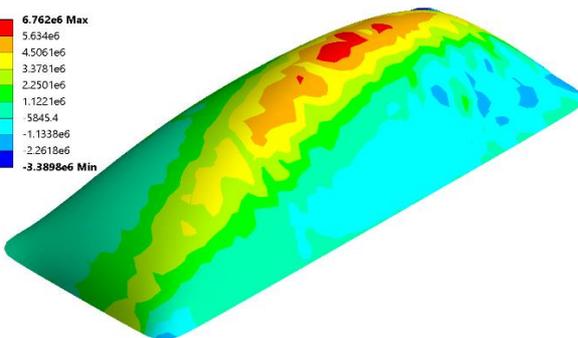


в) 1.8. $\alpha = 30^\circ$, по утку

г) 1.9. $\alpha = 30^\circ$, по основе

Unit: Pa
Solution Coordinate System

6.762e6 Max
5.634e6
4.5061e6
3.3781e6
2.2501e6
1.1221e6
5845.4
-1.1339e6
-2.2618e6
-3.3896e6 Min



Unit: Pa
Solution Coordinate System

6.3585e6 Max
5.3604e6
4.3622e6
3.364e6
2.3659e6
1.3677e6
3.6952e5
-6.2864e5
-1.6268e6
-2.625e6 Min

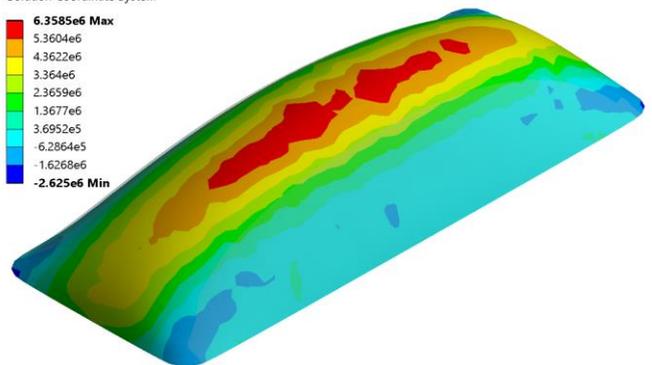


Рисунок 4.27. Карты распределения напряжений, Па.

4.3. Рекомендации по уточнению нормативного документа по проектированию и расчетам воздухоопорных оболочек

Необходимо внести требования расчета перемещений воздухоопорной оболочки для определения зоны безопасного размещения жестких конструкций, таких как металлические ограждения, мачты освещения и др.

Если проектом не предусмотрена автоматизированная система повышения давления и резервные воздухонагнетательные установки, то должен быть произведен расчет воздухоопорной оболочки на действие минимального эксплуатационного давления под оболочкой, указанного в паспорте сооружения (но не менее 150 Па) и расчетной ветровой нагрузки. При назначении ветровой нагрузки следует учитывать степень ответственности и срок службы сооружения.

Расчеты допускается производить в статической постановке с учетом геометрической нелинейности, как правило, с использованием специализированных вычислительных программных комплексов, предназначенных для расчета строительных конструкций.

Рекомендуется следующая последовательность проведения расчета:

1) Создание компьютерной модели оболочки.

Если форма оболочки не является стандартной (цилиндрической или сферической), то начальную форму оболочки следует определять в специализированных программах, предназначенных для поиска рациональной формы оболочки.

При расчете должна учитываться безмоментность напряженного состояния оболочки. При расчете методом конечных элементов следует использовать специальные типы конечных элементов, предназначенные для моделирования мембран. Рекомендуется применять линейно-упругую ортотропную модель материала оболочки. Модули упругости по основе и утку назначаются равными соответствующим секущим модулям по соответствующему направлению для напряжений, составляющих 20% от разрывной прочности, определенной по

результатам одноосных испытаний на разрыв полос материала по стандартным методикам. Модуль сдвига G_{12} допускается принимать равным 5% от модуля упругости по основе. Коэффициент Пуассона ν_1 принимается равным 0.1, а другой вычисляется из выражения $\nu_2 = \nu_1 E_2 / E_1$.

В случае ограничений, не позволяющих учесть ортотропию механических свойств материала, допускается применение изотропной линейно-упругой модели материала, модуль упругости назначается равным секущему модулю упругости по утку для напряжений в 20% от разрывной прочности. В этом случае величина перемещений оболочки будет вычислена с небольшим запасом, однако, распределение напряжений будет определено не точно, поэтому при проверке прочности рекомендуется вводить дополнительный коэффициент надежности по материалу равный 1.2.

Для моделирования швов могут быть использованы специальные конечные элементы типа гибкой нити эквивалентные реальным швам по жесткости на растяжение.

В качестве граничных условий принимается защемление узлов по опорному контуру, деформации фундаментов не учитываются.

2) Производится расчет оболочки на действие внутреннего давления p

При этом оценивается равномерность распределения нормальных напряжений как критерий рационального выбора раскройной формы оболочки. В случае образования складок или резких изменений напряжений требуется заново произвести поиск рациональной формы оболочки.

3) Расчет оболочки на совместное действие избыточного давления и ветра.

Поскольку контакт оболочки с жесткими конструкциями как правило приводит к разрушению оболочки, расчет производится на действие расчетной ветровой нагрузки w , определяемой по формулам СП 20.13330.2016 для данного ветрового района. Далее вычисляется соотношение $\psi = p/w$, соответствующее минимальному эксплуатационному давлению (150 Па или по паспорту сооружения). Минимальное внутреннее давление не рекомендуется назначать менее $0.4w$.

Распределение аэродинамического коэффициента по поверхности оболочки следует принимать на основе результатов экспериментальных исследований, проводимых с учетом аэроупругих явлений или на основе результатов проведения двусторонне связанных расчетов.

Для оболочек на прямоугольном плане следует рассмотреть два случая направления ветра – вдоль короткой стороны, а также под углом к ней 30° .

Для предварительной оценки горизонтальных перемещений оболочек на прямоугольном плане допускается применять следующую формулу:

$$f = 0.06 \frac{w}{p} r,$$

где r – средний радиус кривизны среднего поперечного сечения оболочки, определяемый для начального состояния, м.

Твердые предметы необходимо располагать на расстоянии от оболочки вдвое превышающем величину расчетных перемещений.

Если воздухоопорное сооружение оснащается системой автоматической повышения избыточного давления, то ее включение должно происходить при достижении скоростью ветра вблизи оболочки величины, соответствующей скоростному напору равному $0.7w$. Повышение давления под оболочкой рекомендуется производить до величины не менее $0.6w$. В этом случае, расчет перемещений оболочки выполняется на действие ветровой нагрузки и внутреннего давления равного $0.6w$, после чего определяется безопасная область внутри оболочки, отстоящая от поверхности оболочки на удвоенную величину максимальных расчетных перемещений.

4.4. Выводы по главе 4

1. Показано, что при больших скоростях потока и низком внутреннем давлении учет деформаций оболочки приводит к изменению распределения

аэродинамического коэффициента и, как следствие этого, изменению НДС оболочки.

2. Применение *SST*-модели показывает наилучшую согласованность результатов с экспериментальными данными среди рассмотренных полуэмпирических *RANS*-моделей турбулентности, что согласуется с данными из литературных источников.

3. Решена задача по отысканию формы оболочки на прямоугольном плане. Рациональность выбранной формы подтверждена расчетом на действие внутреннего избыточного давления.

4. Выполнено численное исследование собственных частот и форм колебаний воздухоопорной оболочки на прямоугольном плане размером 20x50 м. Выявлена практически линейная зависимость между величиной внутреннего давления и квадратами собственных частот, что соответствует данным из литературных источников, и тем самым говорит о правильности решения задачи.

5. Для оболочки на прямоугольном плане получены результаты расчета как в связанной двусторонней постановке для различных направлений ветрового потока (0° , 15° и 30° к поперечной оси симметрии оболочки) при соотношениях внутреннего давления и скоростного напора от 0.39 до 0.61, так и в несвязанной постановке, без учета деформаций оболочки.

6. Составлены рекомендации в нормативные документы по проектированию воздухоопорных сооружений и назначению нагрузок, которые позволяют использовать упрощенные инженерные методики оценки перемещений воздухоопорных оболочек без проведения связанных двусторонних расчетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Построена корректная математическая модель воздухоопорной оболочки с учетом ортотропии и геометрической нелинейности.
2. Разработана методика расчета воздухоопорных оболочек в геометрически нелинейной постановке с использованием метода конечных элементов и метода конечных объемов при обтекании оболочки потоком воздуха.
3. Выполнена валидация и верификация предложенной методики на модельных задачах, для которых в научной литературе представлены результаты экспериментальных исследований.
4. Исследовано влияние величины внутреннего давления на частоты и формы собственных колебаний воздухоопорных оболочек на прямоугольном плане с помощью метода конечных элементов.
5. Решены задачи деформирования ортотропных воздухоопорных оболочек различной формы при действии внутреннего давления и внешнего потока воздуха в двусторонне связанной постановке с использованием разработанной методики.
6. Представленные в диссертационном исследовании результаты могут быть использованы, как проектировщиками воздухоопорных сооружений, так и организациями, осуществляющими их эксплуатацию.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы:

- проведение расчетов обтекания воздухоопорных оболочек с учетом окружающей застройки и уточненных характеристик турбулентности набегающего потока;
- проведение численного моделирования сжатого воздуха, расположенного в подоболочечном пространстве воздухоопорных оболочек с применением метода конечных объемов;
- численное моделирование оболочек с тросовым усилением, а также с учетом наличия сварных и монтажных швов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абросимов Н.А. Методика построения разрешающей системы уравнений динамического деформирования композитных элементов конструкций. Учебно-методическое пособие. – Н. Новгород: НИУ ННГУ им. Лобачевского, 2010. – 40 с.
2. Алексеев С.А., Голованов Е.В., Смирнов А.М. Экспериментальное исследование нагрузок на сферические оболочки, создаваемых воздушным потоком // Расчет пространственных конструкций. – 1970. – Вып. XIII. – С. 206-210
3. Алексеев С.А. Основы общей теории мягких оболочек // Расчет пространственных конструкций. – 1967. – Вып. XI. – С. 31-52
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
5. Афанасьева И.Н. Адаптивная методика численного моделирования трехмерных динамических задач строительной аэрогидроупругости: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Афанасьева Ирина Николаевна. – М., 2014. – 200 с.
6. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1024 с.
7. Бейлин Д. А., Поляков В. П., Шмырева В. Н., Яковлев В.А. Использование стереофотограмметрического метода для исследования напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки сферической формы в потоке воздуха // Ученые записки ЦАГИ. – 1982. – №6. – С. 66-76.
8. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т., 2001. – 108 с.
9. Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Афанасьева И.Н. Вычислительная аэродинамика в задачах строительства. – М.: Издательство АСВ, 2017. – 720 с.
10. Бирбраер А.Н., Роледер А.Ю. Экстремальные воздействия на сооружения – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 594 с.

11. Бозняков Е.И., Афанасьева И.Н., Белостоцкий А.М. Численное моделирование аэроупругих колебаний тонкостенных оболочек в трехмерном воздушном потоке. Часть 1: Верификация механической конечно-элементной модели // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2016. Volume 12, Issue 2. С. 75-85.
12. Бруйка В.А., Фокин В.Г., Солдусова Е.А., Глазунова Н.А., Адеянов И.Е. Инженерный анализ в ANSYS Workbench. – Самара: Самар, гос. техн. ун-т, 2010. – 271 с.
13. Бугримов А.Л., Васильченко А.Г., Леонов С.В. Методы инженерного расчета и математического моделирования работы парашютов // Вестник МГОУ. Серия «Физика - Математика». – 2011. – № 3. – С. 90-96.
14. Вальгер С.А. Создание вычислительных технологий для расчета ветровых и ударно-волновых воздействий на конструкции: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Вальгер Светлана Алексеевна. – Новосибирск, 2016. – 220 с.
15. Вальгер С.А., Федоров А.В., Федорова Н.Н. Моделирование несжимаемых турбулентных течений в окрестности плохообтекаемых тел с использованием ПК ANSYS // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18. – № 5. – С. 27–40.
16. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек.. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
17. Гагарин В.Г., Гувенюк С.В., Кубенин А.С. О достоверности компьютерных прогнозов при определении ветровых воздействий на здания и комплексы // Жилищное строительство. – 2014. – № 7. – С. 3-8
18. Гагарин В.Г., Гувернюк С.В., Кубенин А.С., Синявин А.А. Вопросы применения современных компьютерных технологий для решения практических задач строительной аэродинамики // Вестник Отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук. – 2014. – Т. 18. – С. 151–156.

19. Гарбарук А.В. Современные подходы к моделированию турбулентности / А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур, А.К. Травин. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 234 с.
20. Гогешвили А.А., Ярин Л.И. Расчет на ветровую нагрузку воздухоопорного цилиндрического свода // Строительная механика и расчет сооружений. – 1971. – №2. – С. 17-19.
21. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
22. Гонткевич В.С. Собственные колебания ортотропных цилиндрических оболочек // Труды конференции по теории пластин и оболочек. Казань, КФАН. – 1961. – Вып. 1. – С. 124-129.
23. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
24. Гувернюк С.В., Егорычев О.О., Исаев С.А., Корнев Н.В., Поддаева О.И. Численное и физическое моделирование ветрового воздействия на группу высотных зданий // Вестник МГСУ. – 2011. – №3. – С. 185-191.
25. Гувернюк С.В., Егорычев О.О., Исаев С.А., Поддаева О.И., Корнев Н.В., Усачов А.Е. Вычислительная аэродинамика строительных сооружений. Задачи и методы // Вестник МГСУ. – 2011. – №2. – С. 113-118.
26. Денисов М.А. Математическое моделирование теплофизических процессов. ANSYS и CAE-проектирование: учебное пособие. – Екатеринбург: УрФУ, 2011. – 149 с.
27. Друзь Б.И., Друзь И.Б. Основы теории аэро- и гидроупругих колебаний мягких оболочек. – Владивосток: Изд-во Дальневосточного университета, – 1992. – 120 с.
28. Дубинский С.И. Численное моделирование ветровых воздействий на высотные здания и комплексы: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Дубинский Сергей Иванович. – М., 2010. – 199 с.

29. Ермаков А.В. Определение аэроупругих колебаний летательного аппарата, обусловленных вихреобразованием от порыва ветра на стартовой позиции: дис. ... канд. техн. наук: 05.07.03 / Ермаков Андрей Васильевич. – М., 2017. – 167 с
30. Ермаков А.В., Щеглов Г.А. Моделирование методом вихревых элементов динамики цилиндрической оболочки в пространственном потоке жидкости // Известия вузов. Машиностроение. – 2014. – №3 (648). – С. 35-41.
31. Ермолов В.В. Деформации цилиндрической пневматической оболочки под действием ветровой нагрузки // Строительная механика и расчет сооружений. – 1969. – №6. – С. 4-7.
32. Ермолов В.В. Воздухоопорные здания и сооружения. – М.: Стройиздат, 1980. – 304 с.
33. Ермолов В.В., Бэрд У.У., Бубнер Э. и др. Пневматические строительные конструкции. Под ред. В.В. Ермолова. – М.: Стройиздат, 1983.
34. Ермолов В.В., Ермолов С.Б. Развитие методов расчета пневматических конструкций (по материалам коллоквиума ИАСС) // Строительная механика и расчет сооружений. – 1969. – №4. – С. 60-62.
35. Ермолов В.В., Хайдуков Г.К. Симпозиум по пневматическим оболочкам // Строительная механика и расчет сооружений. – 1973. – №6. – С. 74-76
36. Заводовская А.И. Обзор литературы по численным методам расчета мягкооболочечных конструкций. В сб.: Проектир. и расчет конструкций из мягк. оболочек / Дальневост. гос. мор. акад., Владивосток, 1994 – С. 43-63
37. Зылев В.Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. – М.: НИЦ Инженер, 1999. – 144 с.
38. Шешенин С.В., Савенкова М.И. Осреднение нелинейных задач в механике композитов // Вестник Московского университета. Математика. Механика. – 2012. – №5. – С. 58-62
39. Иванова О.А., Марчевский И.К., Морева В.С., Щеглов Г.А. Исследование аэроупругих колебаний провода, вызываемых отрывным вихревым обтеканием // Вестник ННГУ. – 2011. – №4-2. – С.157-159.

40. Ивович В.А. Собственные колебания мягкой пневматической оболочки цилиндрической формы // Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. – №2. – С. 50-54.
41. Исаев С.А., Ватин Н.И., Баранов П.А., Судаков А.Г., Усачов А.Е., Егоров В.В. Разработка и верификация многоблочных вычислительных технологий для решения нестационарных задач строительной аэродинамики высотных зданий в рамках подхода URANS // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – №1(36). – С. 103-109
42. Каплун А.Б., Морозов Е.В., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: практическое руководство. – М.: Едиториал УРСС «ЛИБРОКОМ», 2003. – 272 с.
43. Каракозова А.И. Расчет сооружений с низким конструкционным демпфированием и учетом воздействия пульсаций скорости ветра: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Каракозова Анастасия Ивановна. – М., 2013. – 123 с.
44. Ким А.Ю. Итерационный метод приращений параметров для расчёта нелинейных мембранно-пневматических систем с учетом упругой работы воздуха: дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.17 / Ким Алексей Юрьевич. – Саратов, 2005. – 568 с.
45. Кожанов Д.А. Моделирование поведения гибких тканых композитов при растяжении: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Кожанов Дмитрий Александрович. – Н. Новгород, 2017. – 19 с.
46. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. – М.: Высшая школа, 1972. – 296 с.
47. Кононеко П.И. Исследование напряженно-деформированного состояния мягких анизотропных сферических оболочек в потоке воздуха: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.02.03 / Кононеко Павел Иванович. – Москва, 1975. – 20 с.
48. Кравчук А.С., Шейнин С.А., Кравчук А.И., Тарасюк И.А. Новое уравнение малых поперечных колебаний прямоугольной композиционной мембраны при

- растяжении вдоль ее сторон // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2015. № 2. С. 1-21. – URL: <http://www.apriori-journal.ru/seria2/2-2015/Kravchuk-Shejnin-Kravchuk-Tarasyuk.pdf> (дата обращения: 14.09.2017)
49. Кривошапко С.Н. Пневматические конструкции и сооружения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – № 3. – С. 45-53
50. Кривошапко С.Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – №1. – С. 51-56
51. Кустов А.А., Ибрагимов А.М. Математические модели технических тканей с покрытием // Строительные материалы. – 2017. – №1-2. – С. 94-98.
52. Кылатчанов К.М. Некоторые задачи статики мягких оболочек при больших деформациях: дис. ... канд. Физ.-мат. наук: 01.02.04 / Кылатчанов Кирилл Михайлович. – Ленинград, 1984. – 133 с.
53. Леденев В.В., Худяков А.В. Оболочечные конструкции в строительстве. Теория, проектирование, конструкции, примеры расчета. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2016. – 272 с.
54. Леонтьев Н.В. Применение системы ANSYS к решению задач модального и гармонического анализа. – Нижний Новгород, 2006. – 101 с.
55. Лялин В.В., Морозов В.И., Пономарев А.Т. Парашютные системы. Проблемы и методы их решения. – М.: Физматлит, 2009. – 576 с.
56. Магула В.Э. К расчету цилиндрических пневмооболочек на ветровую нагрузку // Исследования по теории сооружений. – 1972. – Вып. XIX – С.104-107
57. Магула В.Э. Особенности постановки задач в теории мягких оболочек // Теория мягких оболочек и их использование в народном хозяйстве. – Ростов н/Д.: Изд-во Ростовского ун-та, 1976. – С. 15-21
58. Малылхина В.С., Фролов Н.В. Сооружения из пневматических строительных конструкций // Промышленное и гражданское строительство.– 2014. – №8. – С. 22-24

59. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Моделирование динамики вихревых структур высокопроизводительным методом вихревых элементов // Известия вузов. Машиностроение. – 2013. – №9. – С. 26-36
60. Михайлов В.В. Предварительно напряженные комбинированные и вантовые конструкции. – М.: Издательство АСВ, 2002. – 255 с.
61. Мокин Н.А. Проведение нелинейных расчетов воздухоопорных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – №2. – С. 24-33
62. Мокин Н.А., Кустов А.А., Ганджунцев М.И. Численное исследование собственных частот и форм колебаний воздухоопорных сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 4. С. 337–347.
63. Молочников В.М., Мазо А.Б., Малюков А.В., Калинин Е.И., Михеев Н.И., Душина О.А., Паерелий А.А. Особенности формирования вихревых структур в отрывном течении за выступом в канале при переходе к турбулентности // Теплофизика и аэромеханика. – 2014. – Т. 21. № 3. – С. 325-334.
64. Нургазиев Р.Б. Статический расчет пространственных мембранно-стержневых систем с учетом геометрической и конструктивной нелинейности: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Нургазиев Руслан Балтабайевич. – Саратов, 2004. – 245 с.
65. Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. Конструирование и расчет сооружений из тросов, сеток и мембран. – М.: Стройиздат, 1967. – 320 с.
66. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2011. – 736 с.
67. Петренко Ф.И. Расчет сетчатых оболочек отрицательной гауссовой кривизны с учетом геометрической и физической нелинейности: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Петренко Филипп Игоревич. – М., 2017. 189 с.
68. Поляков В.П., Бейлин Д.А. Экспериментальное исследование ветрового давления на мягкую ортотропную оболочку сферической формы // Сб.

- Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам. Вып. 35. Владивосток, 1977. – С. 215-227.
69. Попов Е.В. Метод натянутых сеток в задачах геометрического моделирования: дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 / Попов Евгений Владимирович. – Н. Новгород, 2001. – 248 С.
70. Присадков В.И., Ушаков Д.В., Лицкевич В.В., Хатунцева С.Ю., Соболев Н.В. Оценка риска опускания оболочки воздухоопорного сооружения при пожаре // Пожаровзрывобезопасность. – 2017. – Т.26. №4. – С. 50-57.
71. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 204 с.
72. Савицкий Г.А. Ветровая нагрузка на сооружения. – М.: Стройиздат, 1972. – 112 с.
73. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения. – М.: Стройиздат, 1984. – 360 с.
74. Смирнов А.М. Исследование напряжений в мягкой сферической оболочке-укрытии в потоке воздуха: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.025 / Смирнов Алексей Михайлович. – Москва, 1970. – 16 с.
75. Смирнов А.М., Шмырев И.К. Распределение давления ветра на усеченные сферические оболочки // Строительная механика и расчет сооружений. – 1973. – №5. – С. 18-21.
76. СН 497-77. Временная инструкция по проектированию, монтажу и эксплуатации воздухоопорных пневматических сооружений. М.: Стройиздат, 1977. – 17 с.
77. СНиП II-7-74. Нагрузки и воздействия. – М.: Стройиздат, 1976 – 61 с.
78. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. – М.: Стандартинформ, 2017. – 104 с.
79. СП 384.1325800.2018. Конструкции строительные тентовые. Правила проектирования. – М.: Стандартинформ, 2018. – 30 с.
80. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле: пер. с англ. - М.: Машиностроение, 1985. - 472 с.

81. Трушин С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 256 с.
82. Трушин С.И., Сысоева Е.В. Численный анализ напряженно-деформированного состояния мембранной оболочки с учетом геометрической нелинейности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. – №2. – С. 11-14.
83. Тхай Тхи Ким Тъи. Совершенствование мобильных водонаполняемых дамб для противопаводковой защиты в условиях дельты реки Меконг (Вьетнам): дис. ... канд. техн. наук: 05.23.07 / Тхай Тхи Ким Тъи. Новочеркасск, 2014. – 141 с.
84. Удлер Е.М. Формообразование сооружений из мягких оболочек // Сборник докладов электронной конференции «SWorld – 17-26 desember 2013 – Perspective innovations in science, education, production and transport ‘2013». – URL: <http://www.sworld.com.ua> (дата обращения: 25.12.2017)
85. Уманский А.А. (ред.) Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. В 2-х кн. Кн. 1. – М.: Стройиздат, 1972. – 600 с.
86. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники: учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.
87. Федорова Н.Н., Вальгер С.А. Моделирование взаимодействия потока воздуха с гибкой пластиной // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2015. – № 4 (676). – С. 118–129.
88. Федорова Н.Н. Основы работы в ANSYS 17 / Н.Н. Федорова, С.А. Вальгер, М.Н. Данилов, Ю.В. Захарова. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 210 с.
89. Филатов Е.Ю. Методы и комплекс программ для расчета ветровой нагрузки на здания и сооружения: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Филатов Евгений юрьевич. – Иваново, 2008. – 141 с.
90. Филатов Е. Ю., Ясинский Ф. Н. Математическое моделирование течений жидкостей и газов: учебное пособие. – Иваново: ИГЭУ, 2007. – 84 с.

91. Хованец В.А. Взаимодействие пневмонапряженных мягких оболочек с жесткими преградами: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Хованец Виталий Анатольевич. – Владивосток, 2004. – 208 с.
92. Холопов И.С. Расчет конструкций и сооружений при динамических воздействиях курс лекций. – Самара, 2008. – 200 с.
93. Хорошилов Е.А. Работа тросового купола с тентовым покрытием: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Хорошилов Евгений Анатольевич. – Липецк, 2007. – 25 с.
94. Хрусталеv Б. М., Акельев В. Д., Манюшинец Т. В., Костевич М. Ф. Моделирование конвективных потоков в пневмоопорных объектах. Часть 1. // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2014. – №4. – С. 42-55.
95. Чесноков А.В. Двухъярусная тросовая купольная система на эллиптическом плане: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Чесноков Андрей Владимирович. – Липецк, 2004. – 25 с.
96. Чесноков А. В. Работа пневматических оболочек на прямоугольном плане под действием неравномерных внешних нагрузок // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Строительная информатика. 2014. Вып. 11(32). Ст. 7. – URL: <http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Chesnokov.pdf> (дата обращения: 30.10.2017)
97. Чесноков А.В., Михайлов В.В. Легкие эффективные конструкции покрытия зданий и сооружений. Системы из тросов, тентовых материалов и полимерных пленок. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2013. – 121 с.
98. Шпаков В.П. (ред.) Ткани с эластомерным покрытием для мягких оболочечных конструкций (прошлое, настоящее, будущее). – Сергиев Посад: Весь Сергиев Посад, 2012. - 303 с.
99. Ambroziak A., Kłosowski P. Mechanical properties of polyvinyl chloride-coated fabric under cyclic tests // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2014. – Vol. 33. – №. 3. – Pp. 225-234.
100. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference. Release 15.0 - Canonsburg, 2013 - 988 p.

101. ANSYS Mechanical APDL Element Reference. Release 15.0. - Canonsburg, 2013 - 1448 p.
102. ANSYS Fluent Theory Guide. Release 15.0. - Canonsburg, 2013 - 814 p.
103. Apedo K.L., Ronel S., Jacquelin E., Tiem S. Free vibration analysis of inflatable beam made of orthotropic woven fabric // *Thin-Walled Structures*. – 2014. (78). – pp. 1–15.
104. ASCE 17-96. Air-Supported Structures. – New York: American Society of Civil Engineers, 1997. – 30 p.
105. ASCE/SEI 55-16. Tensile membrane structures. – Reston, Virginia: American Society of Civil Engineers, 2017 – 50 p.
106. Bathe K.J., Ledezma G.A. Benchmark problems for incompressible fluid flows with structural interactions // *Computers & structures*. – 2007. – Vol. 85. – №. 11-14. – Pp. 628-644.
107. Becarelli P. Biaxial Testing for Fabrics and Foils: Optimizing Devices and Procedures. – Springer International Publishing, 2015. – 138 p.
108. Bletzinger K.-U., Kroplin B., Onate E. (eds.) Proceedings of the 6th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures - STRUCTURAL MEMBRANES 2013. - International Center for Numerical Methods in Engineering. Barcelona, Spain. - 2013. - 576 p.
109. Bletzinger K.U., Ramm E. A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy // *International Journal of Space Structures*. – 1999. – Vol. 14. – №. 2. – Pp. 131-145.
110. Borrvall T., Ehle C., Stratton T. A Fabric Material Model with Stress Map Functionality in LS-DYNA. 10th European LS-DYNA Conference, Würzburg, Germany. – 2015. – Pp. 1-22.
111. Borse D.R., Diwan H., Gupta D., Shrivastava A., Upadhyay S.H. Free Vibration Analysis of Inflatable Space Structure // *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*. – 2014. – Vol. 11. — Issue 6. — Pp. 48-53.
112. Brew J.S., Lewis W.J. Computational form-finding of tension membrane structures – Non-finite element approaches: Part 1. Use of cubic splines in finding minimal

- surface membranes // International journal for numerical methods in engineering. – 2003. – Vol. 56. – №. 5. – Pp. 651-668.
113. Chen S., Ding X., Yi H. On the anisotropic tensile behaviors of flexible polyvinyl chloride-coated fabrics // Textile Research Journal. – 2007. – Vol. 77. – №. 6. – Pp. 369-374.
114. Chen W., Hao H., Irawan P., Chen S., Meng Q. Experimental investigations of fabric material against projectile impacts // Construction and Building Materials. – 2016. – Vol. 104. – Pp. 142-153.
115. Chimakurthi S. K. et al. ANSYS Workbench System Coupling: a state-of-the-art computational framework for analyzing multiphysics problems // Engineering with Computers. – 2017. – C. 1-27.
116. Colman A.G., Bridgens B.N., Gosling P.D., Jou G.T., Hsu X.Y. Shear behaviour of architectural fabrics subjected to biaxial tensile loads // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2014. – Vol. 66. – Pp. 163-174.
117. D'Anza G. IxForTen 4000. User Manual - TSI s.r.l. Architecture & engineering, 2010. - 285 p.
118. Daw D. J., Davenport A. G. Aerodynamic damping and stiffness of a semi-circular roof in turbulent wind // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 1989. – Vol. 32. – №. 1-2. – Pp. 83-92.
119. Eurocode 1: Actions on structures. Part 1-4: General Actions. Wind actions. – CEN, 2010. – 146 p.
120. Forster B., Mollaert M. European design guide for tensile surface structures. – Brussel: TensiNet, 2004. – 354 p.
121. Fröhlich J., von Terzi D. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows // Progress in Aerospace Sciences. – 2008. – Vol. 44. – №. 5. – Pp. 349-377.
122. Glück M. et al. Computation of fluid–structure interaction on lightweight structures // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2001. – T. 89. – №. 14. – C. 1351-1368.

123. Gonçalves F.R., Campello E.M.B. Orthotropic material models for the nonlinear analysis of structural membranes // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. – 2014. – Vol. 36. – №. 4. – Pp. 887-899.
124. Hillewaere J., Degroote J., Lombaert G., Vierendeels J., Degrande G. Investigation of wind induced vibrations of silos using 2D and 3D CFD simulations. 9th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Brussels, Belgium. – 2012. – Pp. 1-10.
125. Huntington C.G. (ed.) *Tensile fabric structures*. – Reston: ASCE, 2013. – 183 p.
126. Ishii K. Form finding analysis in consideration of cutting patterns of membrane structures // *International Journal of Space Structures*. – 1999. – Vol. 14. – №. 2. – Pp. 105-119.
127. Jha A.K., Inman D.J. Importance of geometric non-linearity and follower pressure load in the dynamic analysis of a gossamer structure // *Journal of sound and vibration*. – 2004. – Vol. 278. – №. 1-2. – Pp. 207-231.
128. Jinyun Z., Yi L., Lam J., Xuyong C. The Poisson ratio and modulus of elastic knitted fabrics // *Textile Research Journal*. – 2010. – Vol. 80. – №. 18. – Pp. 1965-1969.
129. Kassem M., Novak M. Response of hemispherical, air-supported structures to wind // *Journal of engineering mechanics*. – 1991. – Vol. 117. – №. 8. – Pp. 1718-1737.
130. Kawamura S., Kiuchi T. An experimental study of a one-membrane type pneumatic structure – wind load and response // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. – 1986. – Vol. 23. – Pp. 127-140.
131. Kupzok A.M. *Modeling the Interaction of Wind and Membrane Structures by Numerical Simulation: dissertation for the degree of doctor of engineering*. – Munich, 2009. – 185 p.
132. Lee J. S., Shin J. H., Lee S. H. Fluid–structure interaction of a flapping flexible plate in quiescent fluid // *Computers & Fluids*. – 2012. – T. 57. – C. 124-137.
133. Li C.T., Srivastava N.K. Analysis of pneumatic shells with or without cable net; general finite-element formulation // *Computers & Structures*. – 1974. – Vol. 4. – №. 4. – Pp. 813-828.

134. Liaghat T. Two-way fluid-structure coupling in vibration and damping analysis of an oscillating hydrofoil. Thesis for the degree of Master Science in Engineering Sciences. – Montréal, 2014. – 117 p.
135. Llorens J. (ed.) Fabric Structures in Architecture. – Woodhead Publishing, 2015. – 869 p.
136. Löhner R., Haug E., Michalski A., Muhammad B., Drego A., Nanjundaiah R., Zarfam R. Recent advances in computational wind engineering and fluid-structure interaction // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2015. – Vol. 144. – Pp. 14-23.
137. Meroney R.N., Letchford C.W., Sarkar P.P. Comparison of numerical and wind tunnel simulation of wind loads on smooth, rough and dual domes immersed in a boundary layer // Wind and Structures. – 2002. – Vol. 5. – №. 2/4. – Pp. 347-358.
138. Namkoong K., Choi H. G., Yoo J. Y. Computation of dynamic fluid–structure interaction in two-dimensional laminar flows using combined formulation //Journal of fluids and structures. – 2005. – T. 20. – №. 1. – C. 51-69.
139. Newman B.G., Ganguli U., Shrivastava S.C. Flow over spherical inflated buildings // Journal of wind engineering and industrial aerodynamics. – 1984. – Vol. 17. – №. 3. – Pp. 305-327.
140. Oden J.T., Kubitzka W.K. Numerical analysis of nonlinear pneumatic structures. Colloquium on Pneumatic structures, Stuttgart, Germany. – 1967. – Pp. 1-59.
141. Onate E., Bletzinger K.-U., Kroplin B. (eds.) Proceedings of the 7th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures - STRUCTURAL MEMBRANES 2015. - International Center for Numerical Methods in Engineering. Barcelona, Spain. - 2015. - 568 p.
142. Onate E., Bletzinger K.-U., Kroplin B. (eds.) Proceedings of the 8th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures - STRUCTURAL MEMBRANES 2017. - International Center for Numerical Methods in Engineering. Barcelona, Spain. - 2017. - 504 p.

143. Park G., Sausse M., Inman D.J., Main J.A. Vibration testing and finite element analysis of an inflatable structure // *AIAA journal*. – 2003. – Vol. 41. – №. 8. – Pp. 1556-1563.
144. Pauletti R.M.D.O. Some issues on the design and analysis of pneumatic structures // *International Journal of Structural Engineering*. – 2010. – Vol. 1. – №. 3-4. – Pp. 217-240.
145. Reese S., Raible T., Wriggers P. Finite element modelling of orthotropic material behaviour in pneumatic membranes // *International journal of solids and structures*. – 2001. – Vol. 38. – №. 52. – Pp. 9525-9544.
146. Seidel M. *Tensile surface structures: A practical guide to cable and membrane construction*. – Berlin: Ernst & Sohn Verlag, 2009. – 243 p.
147. Srivastava N. K., Turkkan N. Experimental determination of wind pressure distribution for cylindrical and spherical flexible membrane structures // *Canadian Journal of Civil Engineering*. – 1995. – Vol. 22. – №. 1. – Pp. 23-31.
148. Sygulski R. Dynamic stability of pneumatic structures in wind: theory and experiment // *Journal of fluids and structures*. – 1996. – Vol. 10. – №. 8. – Pp. 945-963.
149. Thomas J.-C., Jiang Z., Wielgosz C. Continuous and Finite Element Methods for the Vibrations of Inflatable Beams // *International Journal of Space Structures*. 2006. № 4 (21). pp. 197–222
150. Tian F.B., Dai H., Luo H., Doyle J.F., Rousseau B. Fluid-structure interaction involving large deformations: 3D simulations and applications to biological systems // *Journal of computational physics*. – 2014. – Vol. 258. – Pp. 451-469.
151. Valdés J.G., Oñate E., Canet J.M. *Nonlinear Analysis of Orthotropic Membrane and Shell Structures including Fluid-Structure Interaction*. – Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering, 2007. – 216 p.
152. Wood J.N., Breuer M. Studies on the Fluid-Structure Interaction of a Pressurized Membranous Hemisphere in Turbulent Flow. Proceedings of conference «Experimentelle Strömungsmechanik (GALA)», Karlsruhe, Germany. – 2017. – Pp. 8-1-8-8